目 录

第一章 黎曼积分

§1. 黎曼积分的定义

我们将仅考虑定义在一固定有限区间 $I \subset \mathscr{R}^d$

$$I = \{x;\ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,\ 1 \leqslant j \leqslant d\}$$
$$= [a_1,\ b_1] \times \cdots \times [a_d,\ b_d]$$

上的有界函数(这里区间总指这样的轴向平行体). 我们定义 I 的测度为

$$m(I) = \prod_1^d (b_j - a_j).$$

对于不同于 I 的区间,其测度的定义类似.

设 f 为 I 上的函数. 若 I 可以剖分成有限多个子区间 I_j, 使在每个 I_j 内 f 为常数,则说 f 为分片常数. 若在 I_j 内 $f = c_j$, 我们令

$$\int_I f dx = \int_I f(x) dx = \sum c_j m(I_j).$$

显然,在利用区间 I 的另一个剖分 I'_j 时, 此值不会改变. 事实上, 只要把 $I'_j \cap I_k$ (它是 I'_j 或 I_k 的加密) 当作 I 的新的剖分便可立即看出.

我们将限于实值函数, 并用 T 记 I 上所有分片常数函数之集合. 上面所定义的 T 中函数的积分具有性质:

$$\int_I f dx \geqslant 0, \text{ 若 } f \in T \quad \text{且 } f \geqslant 0, \tag{1.1.1}$$

$$\int_I (af + bg) dx = a \int_I f dx + b \int_I g dx, \tag{1.1.2}$$

若 $f, g \in T$ 而 $a, b \in \mathscr{R}$.

若 f 是 I 上的有界实值函数，我们定义 f 的黎曼 (Riemann) 上、下积分分别为

$$\overline{\int_I} f dx = \inf_{f \leqslant h \in T} \int_I h dx, \quad \underline{\int_I} f dx = \sup_{f \geqslant h \in T} \int_I h dx. \tag{1.1.3}$$

这样，我们有

$$\underline{\int_I} f dx \leqslant \overline{\int_I} f dx. \tag{1.1.4}$$

事实上，若 $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$，则 $h_2 - h_1 \geqslant 0$. 其次，若 $h_1, h_2 \in T$，则由 (1.1.1) 和 (1.1.2) 有

$$0 \leqslant \int_I (h_2 - h_1) dx = \int_I h_2 dx - \int_I h_1 dx,$$

此式表明所述论断.

定义 1.1.1. 如果

$$\underline{\int_I} f dx = \overline{\int_I} f dx$$

则称 f 是黎曼可积的，并令 $\int_I f dx$ 等于上述共同值，称此值为 f 的积分.

上述定义又可以陈述为：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 h_1，$h_2 \in T$，使得 $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$ 和

$$\int_I (h_2 - h_1) dx < \varepsilon. \tag{1.1.5}$$

I 上的任一连续函数皆是黎曼可积的，这是因为此种函数为一致连续. 假若剖分充分的细，并如此定义 h_1 和 h_2，即在每个子区间内它们分别等于 f 的最小和最大值，则对于任给 ε，可以使得 $h_2 - h_1 < \varepsilon$，从而

$$\int_I (h_2 - h_1) dx < \varepsilon m(I),$$

(1.1.5) 由此得证. 因 $\int f dx$ 位于 $\int h_1 dx$ 和 $\int h_2 dx$ 的中间，所以 $\int f dx$ 与 $\int h_1 dx$ 或 $\int h_2 dx$ 之差也小于 $\varepsilon m(I)$. 这也就是说，当剖分的细密度即子区间的最大直径趋于零时，$\int h_1 dx$ 和 $\int h_2 dx$ 收敛于

$\int f dx$. 若 ξ_i 是子区间 I_i 中任意选定的一点，则当剖分的细密度趋于 0 且 f 为连续时，我们有

$$\sum f(\xi_i) m(I_i) \to \int_I f dx.$$

假设 a 和 b 为非负实数而 f, g 为有界实值函数，则

$$\overline{\int}_I (af + bg) dx \leqslant a \overline{\int}_I f dx + b \overline{\int}_I g dx,$$

$$\underline{\int}_I (af + bg) dx \geqslant a \underline{\int}_I f dx + b \underline{\int}_I g dx. \tag{1.1.6}$$

（作为练习验证一下！）假若 f 和 g 为黎曼可积，则上述二不等式的右端相等，又根据(1.1.4)知它们的左端也相等，所以 $af + bg$ 可积. 其次，若 f 黎曼可积，则 $-f$ 也黎曼可积. 这样，我们证明了

定理 1.1.2. 若 f 和 g 为黎曼可积，a 和 b 是常数，则 $af + bg$ 黎曼可积，并且

$$\int_I (af + bg) dx = a \int_I f dx + b \int_I g dx. \tag{1.1.7}$$

练习. 试证：若 f 或 g 黎曼可积，则(1.1.6)中的等号成立. 其次，若 f 为有界函数并对任一有界函数 g 下式成立

$$\overline{\int}_I (f + g) dx = \overline{\int}_I f dx + \overline{\int}_I g dx,$$

则 f 必为黎曼可积.

前面，我们从分片常数函数出发定义了黎曼积分. 换一种方法，上述积分也可以通过 I 上所有连续函数的集合即函数类 $C = C(I)$ 来加以定义，这是由于

$$\overline{\int}_I f dx = \inf_{f \leqslant h \in C} \int_I h dx, \quad \underline{\int}_I f dx = \sup_{f \geqslant h \in C} \int_I h dx. \tag{1.1.3)'$$

上面的等式可以这样来证明：若 h 为连续和 $\geqslant f$，则有

$$\overline{\int}_I f dx \leqslant \overline{\int}_I h dx = \int_I h dx,$$

从而

$$\overline{\int}_I f dx \leqslant \inf_{f \leqslant h \in C} \int_I h dx.$$

另一方面,可取一个分片常数函数 g 使 $f \leqslant g$ 和 $\int gdx \leqslant \overline{\int} fdx + \varepsilon$. 对于 g 又可找到一个连续函数 h,例如分片线性函数,使得 $g \leqslant h$ 和 $\int hdx \leqslant \int gdx + \varepsilon$. 这样一来,我们有 $f \leqslant h$ 和

$$\int hdx \leqslant \overline{\int} fdx + 2\varepsilon,$$

(1.1.3)′ 由此得证.

黎曼积分的定义还可以这样叙述: 一个函数 f,当而且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $h_j \in C$, $j = 1, 2$, 使得 $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$ 和 $\int (h_2 - h_1)dx < \varepsilon$ 时为黎曼可积. 注意,一旦对 $f \in C$ 按这种或那种方式定义了 $\int fdx$, 那么这个定义便总是可以利用的,同时 (1.1.1) 和 (1.1.2)成立.

练习. 试证函数 f 为黎曼可积的充分与必要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 恒可找到 $g \in C$, 使得 $\overline{\int} |f - g| dx < \varepsilon$ 成立.

练习. 证明达布 (Darboux) 定理: 对任意有界函数 f, 当剖分的细密度趋于 0 时,下式成立

$$\sum (\sup_{I_j} f) m(I_j) \to \overline{\int}_I fdx \text{ 和 } \sum (\inf_{I_j} f) m(I_j) \to \underline{\int}_I fdx$$

(提示: 利用上式对连续函数为真的事实).

现在,通过所建立的积分,我们同时也得到测量区间 I 的子集 E 之体积 (测度) 的一个方法. 若 χ_E 是集合 E 的特征函数(见附录),则将 χ_E 的上 (下) 积分定义为 E 的外 (内) 若当 (Jordan) 测度,并记作 $\overline{m}(E)(\underline{m}(E))$. 假若 χ_E 为黎曼可积,则称 E 为若当可测并用 $m(E)$ 表示 $\int_E \chi_E dx$. 其次,我们规定

$$\overline{\int}_E fdx = \overline{\int}_I \chi_E fdx.$$

显然,一个有限集合是若当可测的且其若当测度为零. 然而,

一个有界的可数集合并不一定是若当可测的.

例 1. 令 E 为给定区间 I 中坐标为有理数的所有点之集合. 因 I 的任一开子区间与 E 及其余集均相交，故由定义直接可知 $\overline{m}(E)=m(I)$ 和 $\underline{m}(E)=0$.

其次，一个若当测度为零的若当可测集并不一定可数. 当空间维数 $d\geqslant 2$ 时此为显然,对于 $d=1$ 的情形康托（Cantor）给出了下面的一个例子.

例 2. 从 $E_0=[0,1]$ 开始,作

$$E_1=E_0\Big\backslash\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)=\left[0,\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ 1\right].$$

对余下的两个子区间中的每一个,重复上面的作法,即删去中间的一个三分之一开子区间,这样我们得到

$$E_2=\left[0,\ \frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\ 1\right].$$

如此以往，重复以上构造法，我们得到 E_n，它由 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间组成. 这样康托集合 $C=\bigcap\limits_{1}^{\infty}E_n$ 是一个若当可测的完备集，由于 $0\leqslant\overline{m}(C)\leqslant m(E_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 对一切 n 成立，所以 $\overline{m}(C)=0$，从而 C 的若当测度为零. 其次，C 集合是不可数的，这是因为它是由能用下式表示的那些 x 所组成

$$x=\sum_{1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n},\ 其中\ x_n=0\ 或\ 2$$

(模仿 $\mathscr{R}$ 为不可数集的证明).

最后,我们给出一个关于积分号下取极限的简单定理:

定理 1.1.3. 设函数 $f_n, n=1,2,\cdots$，在 I 上黎曼可积，并假定当 $n\to\infty$ 时 f_n 在 I 上一致收敛于函数 f. 则 f 也是黎曼可积的并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n dx=\int_I f dx \tag{1.1.8}$$

证：对 $\varepsilon>0$，让 n 足够的大,使

$$f_n - \varepsilon \leqslant f \leqslant f_n + \varepsilon$$

成立,则有

$$\int_I f_n dx - \varepsilon m(I) \leqslant \underline{\int}_I f dx$$

$$\leqslant \overline{\int}_I f dx \leqslant \int_I f_n dx + \varepsilon m(I).$$

由于上式的外层两项相差 $2\varepsilon m(I)$ 和 ε 为任意，故内层两项必须相等,这表明 f 是黎曼可积的. 由此还得到

$$\left|\int_I f dx - \int_I f_n dx\right| \leqslant \varepsilon m(I),$$

它保证(1.1.8)成立.

§2. 正项级数的积分

若 $a_{nm}(n, m = 1, 2, \cdots)$ 为一具非负项的双重序列，周知恒有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm};$$

即如果其中的一端有意义(有限),则另一端亦有意义,并且等式成立. 这--事实可由一正项级数之和是其有限部分和的极限直接得知.

倘若我们仅仅限定于黎曼积分，当将上式中的一个（或者两个)求和换成求积,那么情形就不是同样令人满意了. 下面定理的缺欠就是引进勒贝格（Lebesgue）积分的主要原由.

定理 1.2.1. 设 u_n 是 I 上的非负黎曼可积函数,则有

$$\underline{\int}_I \left(\sum_1^{\infty} u_n\right) dx = \sum_1^{\infty} \int_I u_n dx. \qquad (1.2.1)$$

然而,可能出现这样的情况：尽管所有 u_n 连续并且上式的右端为有限,但是 $\sum_1^{\infty} u_n$ 并非黎曼可积.

注意，对于任一下方有界的函数其下积分是确定的. 狄尼

(Dini) 定理是上述定理证明的基本步骤，因此我们把它作为一个单独的引理.

引理 1.2.2. 若 f_n 为 I 上的非负连续函数，并且对任一 x，当 $n\to\infty$ 时，f_n 下降地趋于零，则 f_n 一致地趋于零，从而

$$\int_I f_n dx \to 0. \tag{1.2.2}$$

证：对任一 $x\in I$ 和给定正数 ε，我们可以找到整数 N，使得 $f_N(x)<\varepsilon$. 显然对属于 x 的一个邻域 O_x 内的 y 亦有 $f_N(y)<\varepsilon$. 根据序列的单调性，从而有 $f_n(y)<\varepsilon$ 当 $y\in O_x$ 和 $n>N$. 当 I 为紧致时，根据波雷尔（Borel）引理可以用有限多个邻域 O_x 覆盖 I. 这也就是说，当 n 充分大时，$f_n<\varepsilon$ 处处成立，由此引理得证.

定理 1.2.1 的证明：令 $\varepsilon>0$ 并选一连续函数 H，使

$$H\leqslant\sum_1^\infty u_n,\quad \underline{\int}\left(\sum_1^\infty u_n\right)dx\leqslant\int H dx+\varepsilon/2.$$

其次，对每个 n 选一连续函数 h_n 使得

$$h_n\geqslant u_n,\quad \int h_n dx\leqslant\int u_n dx+\varepsilon/2^{n+1}.$$

这样一来，对每一 x 我们有

$$\sum_1^\infty h_n(x)\geqslant H(x).$$

令 $f_n(x)=\max\left(H(x)-\sum_1^n h_k(x);\ 0\right)$，则 f_n 单调地趋于零. 从而，由引理知 $\int f_n dx\to 0$. 现在有

$$\int f_n dx\geqslant\int H dx-\sum_1^n\int h_k dx$$

$$\geqslant\underline{\int}\left(\sum_1^\infty u_n\right)dx-\sum_1^n\int u_k dx-\varepsilon,$$

令 $n\to\infty$，我们得到

$$\int\left(\sum_1^{\infty}u_k\right)dx\leqslant\sum_1^{\infty}\int u_k dx+\varepsilon.$$

根据 ε 的任意性，得知(1.2.1)的左端最大不超过其右端．另一方面，不难看出

$$\int\left(\sum_1^{\infty}u_n\right)dx\geqslant\int\left(\sum_1^{N}u_n\right)dx$$

$$=\sum_1^{N}\int u_n dx\to\sum_1^{\infty}\int u_n dx,\text{ 当 }N\to\infty,$$

从而，(1.2.1)得证．

现在剩下就是给出一个例子来说明定理最后的那个论断．如果我们并非一定要求 u_n 具有连续性的话，那么就完全可以把 I 中具有有理坐标的那些点排成一个序列 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$，并令 $u_n(x)=0$ 对 $x\neq\gamma_n$ 和令 $u_n(\gamma_n)=1$．为了达到连续性的要求，我们稍为修改一下作法．作连续函数 f_n，使满足

$$0\leqslant f_n\leqslant 1,\ f_n(\gamma_n)=1,\ \int_I f_n dx\leqslant m(I)/2^{n+1}.$$

并令

$$u_n=\begin{cases}f_1 & \text{当 } n=1 \text{ 时;}\\ f_n(1-f_1)\cdots(1-f_{n-1}) & \text{当 } n>1 \text{ 时,}\end{cases}$$

则有

$$\sum_1^{n}u_k=[1-(1-f_1)\cdots(1-f_n)]\leqslant 1,$$

于是相应的无穷级数的和 $\leqslant 1$ 并在所有的有理点上等号成立，这就说明

$$\int_I\left(\sum_1^{\infty}u_n\right)dx=m(I).$$

然而，根据(1.2.1)，

$$\int\left(\sum_1^{\infty}u_n\right)dx=\sum_1^{\infty}\int_I u_n dx\leqslant m(I)/2.$$

由此可见，$\sum_1^{\infty}u_n$ 是黎曼不可积的．至此定理证毕．

这个定理表明了积分概念上的一个缺欠．逐项积分无穷级数的和，必须不同地理解出现在两端的“积分”，这样 (1.2.1) 才能成立． 在下一章里将看到人们怎样推广积分概念，从而使得定理 1.2.1 变得完好．

§3. 累次积分

设 I (相应地 J) 是 $\mathscr{R}^d$ (相应地 $\mathscr{R}^e$) 中的一个区间，我们用 x (相应地 y) 表示变量，那么

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathscr{R}^{d+e}; x \in I, y \in J\}$$

是 $\mathscr{R}^{d+e}$ 中的一个区间．现在，令 f 是 $I \times J$ 上一个有界实值函数，我们断言

$$\overline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \leqslant \overline{\iint}_{I\times J} f(x,y)dxdy, \qquad (1.3.1)$$

$$\underline{\int}_I \left(\underline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \geqslant \underline{\iint}_{I\times J} f(x,y)dxdy. \qquad (1.3.2)$$

这里，不等式的左端项是 f 先对 y 作上积分(或下积分)，其时固定 x，所得结果是一个 x 的函数，对它又按同一方式在 I 上进行积分．在不等式的右端，f 被视作 $I \times J$ 上的函数进行积分．为证(1.3.1)，我们注意到，若 f 为分片常数则不等式显然成立．这是因为若区间 I_j (相应地 J_k) $\subset I$ (相应地 $\subset J$)，根据区间的测度的定义则 $m(I_j) \cdot m(J_k) = m(I_j \times J_k)$． 现在，如果 $f \leqslant h$ 是一个分片常数函数，那么

$$\overline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \leqslant \int_I \left(\int_J h(x,y)dy\right) dx$$
$$= \iint_{I\times J} h(x,y)dxdy,$$

同时，根据上积分的定义，上式右端对所有如此之 h 的上确界与(1.3.1)的右端相等，由此(1.3.1)得证．(1.3.2)可按同一方式证明或者通过对 $-f$ 应用(1.3.1)加以证明．

现在，让我们特别地假定 f 为 $I \times J$ 上的连续函数. 因为 f 系一致连续,则可证

$$I(x) = \int_J f(x, y) dy$$

是 x 的连续函数. 因为若 $x_n \in I$ 和 $x_n \to x$，则 $f(x_n, y)$ 关于 y 一致地趋于 $f(x, y)$. 根据定理 1.1.3，这也就是说 $I(x_n) \to I(x)$，因此(1.3.1)和(1.3.2)中的上、下积分可以换成积分,从而我们得到

定理 1.3.1. 若 f 是 $I \times J$ 上的连续函数,则

$$\int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx = \iint_{I \times J} f(x, y) dx dy, \tag{1.3.3}$$

同时左端里层关于 y 的积分是 x 的一个连续函数.

现在,我们转向 f 是一般的黎曼可积函数的情形. 但是这只能非常简单扼要地讲,因为即便是这种情形,为了使这些定理能够令人满意,也需要扩充积分概念. 假定 f 在 $I \times J$ 上黎曼可积,由(1.3.1)和(1.3.2)有

$$\begin{aligned} \iint_{I \times J} f(x, y) dx dy &\leqslant \underline{\int}_I \left(\underline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \\ &\leqslant \overline{\int}_I \left(\underline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \leqslant \iint_{I \times J} f(x, y) dx dy \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

和

$$\begin{aligned} \iint_{I \times J} f(x, y) dx dy &\leqslant \underline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \\ &\leqslant \overline{\int}_I \left(\overline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \leqslant \iint_{I \times J} f(x, y) dx dy. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

由于上述式子的外部两端是相等的，所以可以断定

$$x \to \overline{\int}_J f(x, y) dy, \quad x \to \underline{\int}_J f(x, y) dy$$

是在 I 上黎曼可积的,并且

$$\iint_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_I \left(\overline{\int}_J f(x, y) dy \right) dx \tag{1.3.6}$$

和

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\underline{\int}_J f(x,y)dy\right) dx \tag{1.3.7}$$

成立.

例. 设 $I = J = [0,1] \subset \mathscr{R}$ 并令

$$g(x) = \begin{cases} 1/q & \text{当 } x = p/q,\ p,\ q \text{ 互质;} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{当 } y \text{ 为有理数;} \\ 0 & \text{当 } y \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

则

$$\int_I g dx = 0,\quad \overline{\int}_I h dy = 1 \ \text{ 和 } \underline{\int}_J h dy = 0.$$

令 $f(x,y) = g(x)h(y)$. 因为 $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x)$, 立即可知 f 在 $I \times J$ 上黎曼可积并且其积分值等于零. 然而,

$$\overline{\int}_J f(x,y)dy - \underline{\int}_J f(x,y)dy = g(x)$$

同时,当 x 为有理数时 $g(x) \neq 0$. 这也就是说,积分

$$\int_J f(x,y)dy$$

对于这样的 x 是没有定义的. 所以,一般说来 (1.3.3) 是没有意义的.

练习. 设 $f(x,y) = g(x)h(y)$, 其中 g 和 h 是任意非负有界函数,试证(1.3.1)和(1.3.2)中的等号成立. 特别地,若取 g 和 h 为特征函数,可得

$$\overline{m}(E \times F) = \overline{m}(E)\overline{m}(F),\ \text{若} E \subset I \text{ 和 } F \subset J.$$

在此练习中, 假定条件 $g, h \geqslant 0$ 是很本质的,这可由下面的练习看出.

练习. 设 $I = [0,1]$ 和 $J = [0,2]$ 并对 $x \in I$ 和 $y \in J$ 定义

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ -x & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} -1 & \text{当 } y \text{ 为有理数,} \\ y & \text{当 } y \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

令 $f(x,y)=g(x)h(y)+c$，其中 c 为任意常数. 试证以下三个积分

$$\overline{\iint}_{I\times J} f(x,y)dxdy,\quad \overline{\int}_I\left(\overline{\int}_J f(x,y)dy\right)dx$$

和

$$\overline{\int}_J\left(\overline{\int}_I f(x,y)dx\right)dy$$

互不相等.

§4. 变 量 替 换

这里，为避免使记号过于复杂，引进某些略有变化的约定将是适用的. 我们用 C_0 表示所有在 $\mathscr{R}^d$ 上连续并具紧致支集的函数的集合，而 C_0^+ 代表 C_0 中非负函数的集合. 若 $f\in C_0$，则黎曼积分

$$\int_I f dx$$

对任一含 f 的支集的区间 I 取同一值. 我们记此值为 $\int f dx$ 并把它叫做 f 在整个空间的积分.

我们已经证明:

$$\int(af+bg)dx=a\int fdx+b\int gdx,\quad a,b\in\mathscr{R},\quad f,g\in C_0; \tag{1.4.1}$$

$$\int fdx\geqslant 0\quad 若\ f\in C_0^+. \tag{1.4.2}$$

现在，设 $\phi:\mathscr{R}^d\to\mathscr{R}^d$ 是一仿射变换，即

$$\phi(x)=Ax+x_0, \tag{1.4.3}$$

其中 $x_0\in\mathscr{R}^d$ 和 $A\in GL(d,\mathscr{R})$，即 A 是一个 $d\times d$ 可逆实矩阵.

若 f 为一 $\mathscr{R}^d\to\mathscr{R}$ 函数，我们将从 $\mathscr{R}^d$ 到 $\mathscr{R}$ 的函数 $f\circ\phi$ 记作 ϕ^*f. 这个记号对于非仿射变换 ϕ 自然也可以采用. 很明显，$f\in C_0$ 蕴含 $\phi^*f\in C_0$. 然而，当而且仅当 $A=(a_{jk})$ 为对角矩阵时

始有：$f \in T$ 蕴含 $\phi^* f \in T$（分片常数函数的集合）．在这种情形，我们立即得到

$$|\det A| \int \phi^* f dx = \int f dx, \ f \in C_0. \tag{1.4.4}$$

事实上，若 f 是区间

$$I = \{x; a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, j = 1, 2, \cdots, d\}$$

的特征函数，则 $\phi^* f$ 就是区间

$$\{x; a_j - x_{0j} \leqslant a_{jj} x_j \leqslant b_j - x_{0j}, j = 1, 2, \cdots, d\}$$

的特征函数．可见对于这种函数从而对任意 $f \in T$，(1.4.4) 成立．由此，根据积分的定义，(1.4.4) 对所有 $f \in C_0$ 成立．一般地，(1.4.4) 对 $\mathscr{R}^d$ 上的有界并具紧致支集的函数的上积分和下积分成立．

特别地，若令 $f_h(x) = f(x - h)$，则(1.4.1)蕴含

$$\int f dx = \int f_h dx, \ f \in C_0, \ h \in \mathscr{R}^d. \tag{1.4.5}$$

现在，我们来说明：(1.4.1)，(1.4.2) 和 (1.4.5) 是积分的本质属性．

定理 1.4.1. 设 I：$C_0 \to \mathscr{R}$ 是一个泛函，它满足：

(i) $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$，　对 $f, g \in C_0$ 和 $a, b \in \mathscr{R}$；

(ii) $I(f) \geqslant 0$ 当 $f \in C_0^+$；

(iii) $I(f_h) = I(f)$，$f \in C_0$，$h \in \mathscr{R}^d$．

这里 $f_h(x) = f(x - h)$．则存在一个常数 C 使得

$$I(f) = C \int f dx, \ 对 f \in C_0.$$

证：首先注意到，若 f，$g \in C_0$ 和 $f \leqslant g$，则由 (i) 和 (ii) 知 $0 \leqslant I(g - f) = I(g) - I(f)$，亦即 $I(f) \leqslant I(g)$．因此，若所有 $f_n \in C_0$ 的支集均含于一个固定的有界集合 M，并且 f_n 一致地收敛于 f，则 $I(f_n) \to I(f)$．事实上，若 $0 \leqslant g \in C_0$ 和 $g \geqslant 1$ 于 M 上，则有

$$-\varepsilon_n g \leqslant f - f_n \leqslant \varepsilon_n g,$$

其中 $\varepsilon_n = \sup|f - f_n| \to 0$ 当 $n \to \infty$．这也就是说，

$$|I(f)-I(f_n)| \leqslant \varepsilon_n I(g) \to 0 \text{ 当 } n \to \infty.$$

现在,设 f 和 g 属于 C_0 且其支集在 I 内，并设 $I_1, \cdots, I_N$ 是 I 的一个剖分，它们没有公共内点. 取 $h_j \in I_j$ 并注意到 (iii) 和 (i), 则有

$$I(F) = I(f)\sum_1^N g(h_j)m(I_j) \tag{1.4.6}$$

其中

$$F(x) = \sum_1^N f(x-h_j)g(h_j)m(I_j).$$

对于一个充分细的剖分, $F(x)$ 将接近于

$$(f*g)(x) = \int f(x-h)g(h)dh. \tag{1.4.7}$$

也就是说,由于函数 $(x,h) \to f(x-h)g(h)$ 连续并有支集 $\subset 2I \times I$, 从而也一致连续,故有不等式

$$|F(x)-(f*g)(x)| < \varepsilon m(I),$$

只要剖分如此之细使得 $h \to f(x-h)g(h)$ 在 I_j 上的振幅小于 ε, 对所有 x 和 j. 当剖分的细密度趋于零时,由(1.4.6)我们得到

$$I(f*g) = I(f)\int g dx. \tag{1.4.8}$$

若在(1.4.7)中引进变换 $h = x - y$, 根据(1.4.4)不难验证 $f*g = g*f$, 由此可得

$$I(f)\int g dx = I(g)\int f dx. \tag{1.4.9}$$

对于 $\int g dx \neq 0$ 的固定 $g \in C_0$, 我们有 $I(f) = C\int f dx$, 其中 $C = I(g)\Big/\int g dx$.

把定理 1.4.1 概括起来也就是说：除一个常数因子外,积分就是从 C_0 到 $\mathscr{R}$ 对平移为不变的线性正泛函.

现在,设 $A \in GL(d,\mathscr{R})$ 并考虑映射

$$f \to \int f(Ax)dx.$$

显然，它是正的并是线性的，同时

$$\int f_h(Ax)dx = \int f(Ax-h)dx = \int f(A(x-A^{-1}h))dx$$
$$= \int f(Ax)dx.$$

根据定理 1.4.1，我们于是有

$$\int f(Ax)dx = C(A)\int f dx, \text{ 对 } f \in C_0, \quad (1.4.10)$$

其中 C 仅依赖于 A 但独立于 f. 同时，由于

$$\int f(ABx)dx = C(B)\int f(Ax)dx = C(A)C(B)\int f dx,$$

故得

$$C(AB) = C(A)C(B), \text{ 对 } A,B \in GL(d,\mathscr{R}). \quad (1.4.11)$$

若 A 为正交矩阵，则 $C(A)=1$. 事实上，若 $\|x\|$ 代表欧几里得范数 $(x_1^2+\cdots+x_d^2)^{\frac{1}{2}}$ 而 $f(x)=g(\|x\|)$，则 $f(Ax)=f(x)$. 其次，已知若 A 是一个对角矩阵，则 $C(A)=1/|\det A|$. 我们断言：任一矩阵 $A\in GL(d,\mathscr{R})$ 可以写成 $A=O_1DO_2$，其中 O_1 和 O_2 为正交矩阵而 D 为对角矩阵. 如此立即可得

$$C(A) = C(O_1)C(D)C(O_2) = 1/|\det D| = 1/|\det A|,$$

这是因为

$$|\det A| = |\det O_1|\cdot|\det D|\cdot|\det O_2| = |\det D|.$$

这样，我们证明了(1.4.4)对所有仿射变换成立.

为证前面那个断言，我们用 A^* 记 A 的转置，同时利用以下的事实：正对称矩阵 A^*A 可以通过正交变换化成正对角矩阵 D^2，即存在一个正交矩阵 O_2 使 $A^*A=O_2^*D^2O_2$. 我们令 $O_1=AO_2^{-1}D^{-1}$，亦即 $A=O_1DO_2$，从而得到 $O_2^*DO_1^*O_1DO_2=O_2^*D^2O_2$，这表明 $O_1^*O_1=I$，这也就是说 O_1 也是正交的.

显然，若 f 有界并具有紧致支集，则等式(1.4.4)对上和下黎曼积分成立，这表明：ϕ^*f 黎曼可积的充分与必要条件是 f 黎曼可积. 特别是，在区间 $I\subset\mathscr{R}^d$ 的像 $A(I)=\{Ax;\ x\in I\}$ 内我们可以取 $f=1$. 那么，(1.4.4)告诉我们，$A(I)$ 为若当可测并且

$$m(A(I)) = |\det A| m(I),$$

这就严格证实了把行列式当作体积比的解释．注意，当 $\det A = 0$ 时，等式 $m(A(I)) = |\det A| m(I)$ 也成立． 这是因为 $A(I)$ 属于一超平面，通过正交变换(既不影响可测性也不影响测度值)它可以变到坐标平面 $x_d = 0$ 内，那么，显然此时 $m(A(I)) = 0$.

一个矩阵 A 的范数定义为 $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \|Ax\| / \|x\|$. 若 $\det A \neq 0$, 如前面那样把 A 表示成 $A = O_1 D O_2$, 则显然 $\|A\| = \|D\|$,它是 D 的对角元素*)，从而

$$|\det A| = |\det D| \leqslant \|D\|^d = \|A\|^d.$$

由此可知，$A(I)$ 的体积最大不超过 $\|A\|^d m(I)$. 若 I 是一个边长为 δ 的立方体，则 $A(I)$ 被包含在一个以 $\delta\sqrt{d}\|A\|$ 为边长的立方体之中，此立方体的中心是 Ax_0，这里 x_0 是 I 的中心，I 中任一点到 x_0 的距离不超过 $(\delta/2)\sqrt{d}$. 由上述简单观察得一粗略估计 $m(A(I)) \leqslant (\delta\sqrt{d})^d \|A\|^d$. 在下面的引理的证明中我们将用到这个估计式．此引理对(1.4.4)在非仿射变换情形的推广是重要的．

引理 1.4.2. 设 A 为一 $d \times d$ 实矩阵，I 是 $\mathscr{R}^d$ 中边长为 δ 的立方体，并设 $A(I)_\eta$ 是所有至 $A(I)$ 距离 $\leqslant \eta$ 的点组成之集合．则有

$$\overline{m}(A(I)_\eta) \leqslant \delta^d |\det A| + 4d\eta(2\eta + \delta\sqrt{d-1}\|A\|)^{d-1}. \tag{1.4.12}$$

证：若 ∂I 是 I 的边界，那么 $A(\partial I)$ 与 $A(I)$ 的边界等同．当 $\det A \neq 0$ 时，由于这时 I 的内点被映射为 $A(I)$ 的内点，上述结论显然为真． 若 $\det A = 0$，这时过 I 的每一个点存在一条线，它被 A 映射成一个点，并且此线必与 I 的边界相交，于是得到 $A(I) = A(\partial I)$. 设点 x 至 $A(I)$ 的距离 $\leqslant \eta$ 并且不属于 $A(I)$，故 x 必与 $A(\partial I)$ 中某个点的距离 $\leqslant \eta$ (就 $A = 2$ 的情形画出图形!). 因为 $A(I)$ 的测度是 $\delta^d |\det A|$，所以只要证明所有与 $A(I')$ 距离 $\leqslant \eta$ 的点之集合的若当外测度不超过

$$2\eta(2\eta + \delta\sqrt{d-1}\|A\|)^{d-1}$$

*) 确切言之，应该是 D 的对角元素的按模的最大值．——译者注

就够了，这里 $I'\subset\partial I$ 是 I 的一个 $d-1$ 维边，而 ∂I 是 I 的 $2d$ 个这种边的并集。基于正交不变性和平移不变性，我们可以假定 $A(I')$ 位于超平面 $x_d=0$ 内。若 (x',x_d) 至 $A(I')$ 的距离 $\leqslant\eta$，那么 $(x',0)$ 至 $A(I')$ 的距离必定 $\leqslant\eta$ 并且 $|x_d|\leqslant\eta$。然而，$A(I')$ 属于一个边长 $\leqslant\delta\sqrt{d-1}\|A\|$ 的 $d-1$ 维立方体的内部。所以，若 x 至 $A(I')$ 的距离 $\leqslant\eta$，那么 x 必属于 $x_d=0$ 中一个边长为 $2\eta+\delta\sqrt{d-1}\|A\|$ 的立方体与 x_d 轴上一个长度为 2η 的 1 一维区间的直积。由此可知，所有这种点 x 之集合的外测度不超过

$$2\eta(2\eta+\delta\sqrt{d-1}\|A\|)^{d-1}.$$

至此引理证毕。

现在，我们可以讨论一般连续可微的映射了。作为开始，我们不假设映射是一对一的。

定理 1.4.3. 设 Ω_1,Ω_2 为 $\mathscr{R}^d$ 中的开集而 ϕ: $\Omega_1\to\Omega_2$ 为一连续可微的映射。若 K 是 Ω_1 中的一个紧致集合，则

$$\overline{\int}_{\phi(K)}u\,dx\leqslant\overline{\int}_K u(\phi(x))\,|\det\phi'(x)|\,dx,$$

$$u\in C_0(\Omega_2),\ u\geqslant 0. \tag{1.4.13}$$

这里，当 $\phi(x)=(\phi_1(x),\cdots,\phi_d(x))$ 时，我们利用记号 $\phi'(x)=(\partial\phi_j(x)/\partial x_k)$。证明定理之前，我们给出定理的一个有趣的推论。

推论 1.4.4 [莫尔斯-萨得(Morse-Sard)]. 在定理的假设下，集合 $\{\phi(x);x\in K,\det\phi'(x)=0\}$ 的若当测度为零。

注意，推论表明：对绝大多数 $y\in\Omega_2$，根据隐函数定理可以断定集合 $\{x;x\in K,\phi(x)=y\}$ 由有限多个点组成，并在这种点的一个邻域内映射 ϕ 是一对一的。

定理 1.4.3 的证明：设 ε 为任一正数。若 I 是一个边长为 δ 的立方体，它与 K 相交，并设 δ 充分小，那么根据一致连续性和泰勒 (Taylor) 公式有

$$\|\phi(x)-\phi_y(x)\|\leqslant\varepsilon\delta,\ x,\ y\in I,$$

其中 $\phi_y(x)=\phi(y)+\phi'(y)(x-y)$ 是泰勒展式中的线性项。根

据引理 1.4.2 的记号，此即

$$\phi(I)\subset(\phi_y(I))_{\varepsilon\delta}.$$

这也就是说，对于一个适当的常数 C，我们有

$$\begin{aligned}\overline{m}(\phi(I)) &\leqslant \delta^d|\det\phi'(y)| + C\varepsilon\delta^d \\ &= m(I)(|\det\phi'(y)| + C\varepsilon).\end{aligned}$$

现在，选K的一个由立方体 $\{I_j\}$ 作成的开覆盖，并在每个 I_j 中取一点 y_j，于 y_j 处函数 $u(\phi(y_j))$ 取最大值，那么有

$$\chi_{\phi(K)}u \leqslant \sum\chi_{\phi(I_j)}u(\phi(y_j))$$

(这里同往常一样，χ_E 表示E的特征函数)．由此我们得到

$$\overline{\int}\chi_{\phi(K)}u\,dx \leqslant \sum m(I_j)(|\det\phi'(y_j)| + C\varepsilon)u(\phi(y_j)).$$

现在，我们可以如此选择 $\{I_j\}$ 使上式右端充分地靠近

$$\overline{\int_K}u(x)|\det\phi'(x)|dx,$$

由此定理得证。

至此，不难得到关于多重积分变量代换的定理．

定理 1.4.5. 设 Ω_1,Ω_2 是 $\mathscr{R}^d$ 中的开集，并设ϕ是一个从 Ω_1 到 Ω_2 的一对一映射并且ϕ和 ϕ^{-1} 都是连续可微的． 若u是一个有界函数并具紧致支集属于 Ω_2。那么，ϕ^*u 黎曼可积的充分与必要条件是u黎曼可积，并且有

$$\int\phi^*u|\det\phi'|dx = \int u\,dx. \tag{1.4.14}$$

证：令 $\phi_1=\phi^{-1}$，则 $|\det\phi'(\phi_1(x))|\cdot|\det\phi_1'(x)|=1$. 对$\phi$以及 ϕ_1 应用 (1.4.13) 并取K充分大使于 $\phi(K)$ 之外 $u=0$，我们由此得到

$$\overline{\int}u\,dx \leqslant \underline{\int}u(\phi(x))|\det\phi'(x)|dx \leqslant \overline{\int}u\,dx,$$

$$u\in C_0(\Omega_2),\quad u\geqslant 0,$$

因此等号必然成立．此外，这里的被积函数是连续的，所以黎曼积分存在。这样一来，首先当u为连续且 $\geqslant 0$ 时我们得到 (1.4.14)，然后，根据线性性质，对所有的 $u\in C_0$ 得到 (1.4.14)． 如同往常那

样，由此即可推出 (1.4.14) 对上积分和下积分成立，只要 u 是有界并在 Ω_2 的一个紧致子集之外为零. 至此定理得证.

现在，将黎曼积分的定义扩展到不一定具有紧致支集的函数以及将定理 1.4.5 推广到这种情形就应该是非常容易的事了. 因为我们的主要目标是研究勒贝格积分，于是这里我们仅仅满足于给予几个简短的启示，而将细节留给感兴趣的读者.

设 f 为任一非负连续函数，我们将其在开集 Ω 上的积分定义为

$$\bar{\int}_\Omega f dx = \sup \int g dx;\ 0 \leqslant g \leqslant f,\ g \in C_0(\Omega).$$

此积分的值自然可能是 $+\infty$，并且若 $f \in C_0$，这个定义显然是同原先的定义完全一致的. 对于一个在 Ω 上局部有界的函数 $f \geqslant 0$，也就是说在 Ω 的每一个紧致子集上有界，我们令

$$\bar{\int}_\Omega f(x) dx = \inf \int_\Omega g(x) dx,\ f \leqslant g \in C(\Omega).$$

(如此之函数 g 存在!) 一个在 Ω 上局部有界的函数 f，我们称之为黎曼可积，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个函数 $g_\varepsilon \in C_0(\Omega)$ 使得 $\bar{\int}_\Omega |f(x) - g_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$. 同时，将 f 的积分定义作为 $\int g_\varepsilon(x) dx$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限值(此极限值存在且有限). 用这个积分概念，我们立即得到定理 1.4.5 在任意局部有界黎曼可积函数上的一个推广.

第二章 勒贝格积分

§1. 下方半连续正函数的积分

按第一章§4所引进的记号，关于 C_0 中函数的积分的基本性质，仅就下面讨论中所要用到的而言，有

$$\int (af+bg)dx = a\int fdx + b\int gdx; \qquad (2.1.1)$$

$$a, b\in \mathscr{R};\ f,\ g\in C_0,$$

和

$$\int fdx \geqslant 0, \text{ 若 } f\in C_0^+. \qquad (2.1.2)$$

由(2.1.1)和(2.1.2)又有

$$\int fdx \leqslant \int gdx, \text{ 当 } f\leqslant g \text{ 和 } f,\ g\in C_0. \qquad (2.1.3)$$

请注意，这里我们没有利用黎曼积分对坐标平移的不变性质．关于这一点到第三章就会明白了．

作为开始，我们将积分概念推广到这样一些函数，它们可以表示成和 $\sum u_n$，其中所有 $u_n\in C_0^+$．首先，我们研究何种函数可以如此表示．

定义 2.1.1. 一个值域为 $(-\infty,+\infty]$ 的函数 f，若对于任意 x 和任意 $a<f(x)$，均可找到 x 的一个邻域 U，使得 $f(y)>a$ 对一切 $y\in U$，则称 f 为下方半连续． 下方半连续的非负函数的集合记作 I^+． 如果 $-f$ 为下方半连续，则称 f 为上方半连续．

此处及以后，允许 $+\infty$ 作为函数值，这常常带来方便．此时约定

$a<+\infty$，若 a 为一实数值，

$(+\infty)+a=a+(+\infty)=+\infty$，若 $-\infty<a\leqslant+\infty$，

$$a\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot a=+\infty,\ 若\ 0<a\leqslant+\infty.$$

引用$+\infty$的优越性之一是使得任一非空的实数集恒有上确界.

由开集的定义(见附录)，定义 2.1.1 也可以叙述成：若 $\{y;f(y)>a\}$对任意 a 恒为开集,则 f 为下方半连续. 因为开集的任意并集以及有限个开集的交集仍然为开集,由此可知

引理 2.1.2. 设 f_α，$\alpha\in A$为任意一个下方半连续函数族,则 $\sup\limits_{\alpha\in A}f_\alpha$ 仍然为下方半连续. 其次,当 A 为有限集时, $\inf\limits_{\alpha\in A}f_\alpha$ 也是下方半连续的.

现在,我们可以得到 C_0^+ 中函数的和的特征了.

定理 2.1.3. 一个非负函数 f 可以写成和式

$$f=\sum_1^\infty u_n,\ u_n\in C_0^+ \tag{2.1.4}$$

的充分必要条件是$f\in I^+$.

证：由于非负级数的和是其部分和的上确界,故由引理 2.1.2 立即可知,和函数 (2.1.4) 是下方半连续的. 另一方面，设 f 是 I^+ 中任意一个函数. 作为开始，我们构造一个非负连续函数的递增序列,它趋于 f. 令

$$S_n(x)=\inf_z(f(z)+n\|z-x\|),\ n=1,2,\cdots. \tag{2.1.5}$$

显然，S_n 关于 n 是递增的，并且 $0\leqslant S_n(x)\leqslant f(x)$，这只要令 $z=x$ 便可立即看出. 根据 $|\|z-x\|-\|z-y\||\leqslant\|x-y\|$，我们得到(见附录)

$$|S_n(x)-S_n(y)|\leqslant n\|x-y\|.$$

可见,$S_n(x)$ 为连续. 为了证明：$S_n(x)\uparrow f(x)$，当 $n\to\infty$，我们令 $a<f(x)$ 并按下方半连续的定义固定 x 的邻域 U. 于是

$$f(z)+n\|z-x\|>a,\ 当\ z\in U.$$

其次,当 n 取的充分大时也必有

$$n\|z-x\|>a\ 只要\ z\notin U.$$

这也就是说,对于如此之 n,

$$S_n(x)>a,$$

从而，可以断定 $S_n(x) \to f(x)$.

令 $S_0 = 0$. 这里，以 $u_n = S_n - S_{n-1}$ 来作为定理中所要求的函数是不完全满足要求的，因为 u_n 的支集不见得有界. 为此，我们取一个连续函数 $g(x) \geqslant 0$，它满足：当 $\|x\| < 1$ 时 $g(x) = 1$；而当 $\|x\| > 2$ 时 $g(x) = 0$；同时 $g(x)$ 是 $\|x\|$ 的下降函数. 这样一来，函数序列 $\tilde{S}_n(x) = S_n(x)g(x/n)$ 关于 n 也是递增的并趋于 $f(x)$. 现在，令 $u_n = \tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}$，所得级数 $\sum_1^\infty u_n$ 即满足定理的要求，定理证毕.

练习. 试证定理(2.1.5)中的下确界是可以实际达到的.

假定 $f \in I^+$ 和 (2.1.4) 是 f 的一个表示式，把定理 1.2.1 的证明简单修改一下，可以证明

$$\sum_1^\infty \int u_n dx = \sup_{f \geqslant g \in C_0} \int g dx.$$

据此，自然地引进如下定义：

定义 2.1.4. 若 $f \in I^+$，定义 f 的上积分为如下之非负实数(可能是 $+\infty$)

$$\int^* f dx = \sup_{g \leqslant f} \int g dx, \quad g \in C_0. \tag{2.1.6}$$

实际上，让 g 取遍 C_0^+ 就够了. 为了说明何以把 I^+ 中函数的黎曼下积分称之为上积分的理由，我们愿意指出，I^+ 中每个满足条件 $\int^* f dx < \infty$ 的函数，按以后的定义必定都是可积的，因而这时同样地也可以称之为积分.

引理 2.1.5. 设 $M \subset C_0^+$，并假定对任意 $g_1, g_2 \in M$ 存在 $g \in M$，使得 $g_1 \leqslant g$ 和 $g_2 \leqslant g$ 成立. 令 $f = \sup_{g \in M} g$，则 $f \in I^+$ 且

$$\int^* f dx = \sup_{g \in M} \int g dx. \tag{2.1.7}$$

证：(2.1.7)的右端显然不超过 $\int^* f dx$. 为证明另一方向的不等关系，对任意满足 $g \leqslant f$ 的函数 $g \in C_0$，我们取函数 $h \in C_0^+$，它

满足：$h>0$ 于 g 的支集。下面证明：对任给 $\varepsilon>0$，存在一个函数 $G\in M$ 使得 $G>g-\varepsilon h$。如此，我们得到

$$\sup_{G\in M}\int Gdx\geqslant\int gdx-\varepsilon\int hdx.$$

由于 ε 为任意正数和 g 为 C_0 中满足 $\leqslant f$ 的任意函数，所以(2.1.7)的左端所代表的上确界等于右端。

为证函数 G 的存在性，我们注意到，对任一 $x\in\operatorname{supp}g$，可以找到一个 $G_x\in M$ 使得 $G_x(x)>g(x)-\varepsilon h(x)$。此不等式自然于 x 的某个邻域 U_x 内也成立。根据波雷尔-勒贝格引理，我们可以选出有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，使得 $\operatorname{supp}g\subset U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\cdots\cup U_{x_k}$，同时选出一个函数 $G\in M$ 使得 $G\geqslant\max(G_{x_1}, G_{x_2}, \cdots, G_{x_k})$，它就具有所要求的性质。

特别地，我们可以将 M 取作一个函数序列 $f_n\in C_0^+$，它上升地趋于 f，于是

$$\int^* fdx=\lim_{n\to\infty}\int f_ndx$$

对所有如此之序列 $\{f_n\}$ 成立。

现在，我们把 I^+ 中函数上积分的最重要的性质概括为

定理 2.1.6. 若 $f, g\in I^+$ 和 $f\leqslant g$，则 $\int^* fdx\leqslant\int^* gdx$。假如 $f\in I^+$ 和 a 为一正实数，则 $\int^*(af)dx=a\int^* fdx$ 成立。如果 $\{f_n\}_1^\infty$ 为 I^+ 中的一个序列，则 $\sum_1^\infty f_n\in I^+$ 并且

$$\int^*\left(\sum_1^\infty f_n\right)dx=\sum_1^\infty\int^* f_ndx. \tag{2.1.8}$$

另外，若 $f_n\in I^+$，$f_n\uparrow f$ 当 $n\to\infty$，则 $f\in I^+$ 且

$$\int^* f_ndx\to\int^* fdx, \text{ 当 } n\to\infty. \tag{2.1.9}$$

证： 所有论断除(2.1.8)和(2.1.9)外都是明显地成立。无论如何，(2.1.8)((2.1.9))可以通过应用引理2.1.5来证明，其时 M 取作为

所有和函数 $\sum_1^\infty g_n$ 的集合(所有上确界 $\sup_n g_n$ 的集合),其中 $g_n \leqslant f_n$, $g_n \in C_0^+$ 并且所有 g_n 除有限个外是恒等于零的。

§2. 正函数的上积分

同黎曼意义上、下积分的定义类似,我们得到如下定义,所不同的地方,就是借助 I^+ 的函数,以之代替分片常数或者连续函数。

定义 2.2.1. 设 f 是任一非负函数,则 f 的上积分由下式定义

$$\int^* f dx = \inf_{f \leqslant h \in I^+} \int^* h dx. \tag{2.2.1}$$

显然,若 $f \in I^+$, 则 $\int^* f dx$ 的定义与 §1 中的定义是等同的.注意,若 $f \geqslant 0$ 为有界并具有紧致的支集,则有

$$\int^* f dx \leqslant \overline{\int} f dx. \tag{2.2.2}$$

类似于定理 2.1.6,我们得到上积分的如下性质。

定理 2.2.2. 若 $0 \leqslant f \leqslant g$, 则 $\int^* f dx \leqslant \int^* g dx$. 当 $f \geqslant 0$ 和 $0 \leqslant a < \infty$时,有 $\int^* (af) dx = a \int^* f dx$. 其次,对于非负函数序列 $\{f_n\}_1^\infty$ 有

$$\int^* \left(\sum_1^\infty f_n \right) dx \leqslant \sum_1^\infty \int^* f_n dx \tag{2.2.3}$$

和

$$\int^* f_n dx \uparrow \int^* f dx, \text{ 若 } f_n \uparrow f, \text{ 当 } n \to \infty. \tag{2.2.4}$$

证:头两个结论是明显的. 为证 (2.2.3),我们取 $\varepsilon > 0$ 和选 $g_n \in I^+$ 使 $g_n \geqslant f_n$ 和

$$\int^* g_n dx \leqslant \int^* f_n dx + \varepsilon/2^n.$$

若令 $g=\sum_1^\infty g_n$，则 $\sum_1^\infty f_n \leqslant g \in I^+$，并由(2.1.8)我们得到

$$\int^*\left(\sum_1^\infty f_n\right)dx \leqslant \int^* g dx = \sum_1^\infty \int^* g_n dx$$

$$\leqslant \sum_1^\infty \int^* f_n dx + \varepsilon,$$

由此(2.2.3)得证．为证(2.2.4)，我们先证如下引理．

引理 2.2.3. 假设

$$0 \leqslant f_i \leqslant g_i \in I^+ \text{和} \int^* g_i dx \leqslant \int^* f_i dx + \varepsilon_i, \quad i=1,2.$$

那么，若 $f_1 \leqslant f_2$，则有

$$\int^* \max(g_1, g_2) dx \leqslant \int^* f_2 dx + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

证：定理 2.1.6 和公式 $\max(g_1, g_2) + \min(g_1, g_2) = g_1 + g_2$ 告诉我们

$$\int^* \max(g_1 + g_2) dx + \int^* \min(g_1, g_2) dx$$

$$= \int^* g_1 dx + \int^* g_2 dx \leqslant \int^* f_1 dx$$

$$+ \int^* f_2 dx + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

又因 $f_1 = \min(f_1, f_2) \leqslant \min(g_1, g_2)$，所以引理得证．

(2.2.4)的证明：令 $\varepsilon > 0$ 并选 $g_n \in I^+$ 使得 $f_n \leqslant g_n$ 和

$$\int^* g_n dx \leqslant \int^* f_n dx + \varepsilon/2^n.$$

因为序列 $\{g_n\}$ 不一定是递增的，所以我们令 $g_n' = \max(g_1, \cdots, g_n) = \max(g_{n-1}', g_n)$．由引理

$$\int^* g_n' dx \leqslant \int^* f_n dx + \sum_1^n \varepsilon/2^k. \tag{2.2.5}$$

我们令 $n \to \infty$，并设 $g = \lim g_n'$，则由(2.2.5)和定理 2.1.6 有

$$\int^* f dx \leqslant \int^* g dx \leqslant \lim \int^* f_n dx + \varepsilon,$$

这是因为 $f \leqslant g$ 和当 $n \to \infty$ 时 $I^+ \ni g_n' \uparrow g$. 由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故

$$\int^* f dx \leqslant \lim \int^* f_n dx,$$

而反方向的不等式成立是显然的，至此(2.2.4)得证.

(2.2.3) 和 (2.2.4) 是黎曼上积分所没有的性质，所以上积分 $\int^*$ 比黎曼上积分优越.

§3. 零集合和零函数

在这一节里，我们要研究：在什么样的集合上人们可以任意地修改一个函数，而不致改变其积分值.

定义 2.3.1. 一个函数 $f \geqslant 0$，若 $\int^* f dx = 0$，则称为零函数 (布巴基 (Bourbaki) 的术语是：可忽略函数).

由定理 2.2.2，立即可得

引理 2.3.2. 若 $0 \leqslant f \leqslant g$ 而 g 是一个零函数，则 f 也是零函数. 又若所有 f_n 为零函数，那么 $\sum_1^\infty f_n$ 亦为零函数.

据此，容易得到

定理 2.3.3. 若 f 和 g 为非负函数，其中 g 是一零函数，同时 $f(x) \neq 0$ 蕴含 $g(x) \neq 0$，则 f 是零函数.

证：根据引理 2.3.2，$g + g + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} ng$ 是一个零函数. 然而，于 $f(x) \neq 0$ 的地方，上述函数的值为 $+\infty$，从而 $\geqslant f$，因此，f 是零函数.

根据定理 2.3.3，确定 f 是否是零函数只需把注意力放在 $\{x; f(x) \neq 0\}$ 上. 因此，我们引进

定义 2.3.4. $\mathscr{R}^d$ 的一个部分集 E，如果它的特征函数是一个零函数，则称 E 为零集合.

类似于引理 2.3.2 和定理 2.3.3，我们得到

定理 2.3.5. 一个零集的部分集为零集,可数多个零集的并集也是一个零集. 一个函数为零函数的充分与必要的条件是它仅仅在一个零集上不等于零.

注意,根据(2.2.2),一个若当外测度为零的有界集(特别地一个点),在定义 2.3.4 的意义下为零集. 然而,逆命题不一定成立,这是因为,由定理 2.3.5,任一可数集合为零集,同时,确实存在若当外测度为正的有界可数集. 无论如何,根据下面的练习,对于紧致集合,上述逆命题成立.

练习. 若K为一紧致零集,则 $\overline{m}(K)=0$. (提示: 往证若 $C_0^+\ni g_n\uparrow g\geqslant \chi_K$ 则 $g_n\geqslant(1-\varepsilon)\chi_K$ 对充分大的 n.)

特别是,这表明: 倘若 $K=[0,1]$ 为可数集, 那么K必然就是零集并导致矛盾 $0=\overline{m}(K)=1$. 所以 $K=[0,1]$ 是不可数集.

一个依赖于 x 的命题,若对除去属于一个零集的 x 成立,则说这个命题几乎处处成立(简记为 a. e.). 前面的定理表明: 一个函数为零函数的充分必要条件是它几乎处处等于零.

定理 2.3.6. 假定 f 和 g 为非负函数并且几乎处处相等,则

$$\int^* f dx=\int^* g dx.$$

证: 令 $h=\min(f,g)$ 和 $H=\max(f,g)$. 则$H-h$是一个零函数(若令 $\infty-\infty=0$), 并且

$$\int^* H dx\leqslant\int^* h dx+\int^*(H-h)dx=\int^* h dx$$
$$\leqslant\int^* H dx,$$

所以H和h具有同一的上积分. 因为f和g位于h与H的中间,所以它们的上积分相等.

定理 2.3.7. 若 $f\geqslant 0$ 且 $\int^* f dx<\infty$, 则 f 为几乎处处有限的函数.

证: 设χ是 $\{x;\ f(x)=+\infty\}$ 的特征函数. 因 $f\geqslant 0$, 故

$n\chi \leqslant f$，从而

$$0 \leqslant \int^* \chi dx \leqslant \frac{1}{n} \int^* f dx, \text{ 对所有 } n.$$

令 $n \to \infty$，得到 $\int^* \chi dx = 0$。

这个定理与定理 2.2.2 合在一起，我们得到

定理 2.3.8. 设 $f_n \geqslant 0$ 和 $\sum_1^\infty \int^* f_n dx < \infty$，则

$$\sum_1^\infty f_n(x) < \infty, \text{ a. e. 在 } \mathscr{R}^d \text{ 上}.$$

§4. 勒贝格积分的定义及其重要性质

同第一章 §1 里关于黎曼可积的准则类似，我们引进

定义 2.4.1. 设 f 是值域为 $[-\infty, +\infty]$ 的函数，若对任意 $\varepsilon > 0$ 存在函数 $g \in C_0$ 使得

$$\int^* |f - g| dx < \varepsilon,$$

则称 f 在勒贝格意义下可积.

由定义可知：f 为可积的充分与必要条件是对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_0$ 和 $h \in I^+$ 使得

$$|f - g| \leqslant h \text{ 并且} \int^* h dx < \varepsilon.$$

作为练习，试证如下两定理.

定理 2.4.2. 假如对任意 $\varepsilon > 0$，f 能够被一个可积函数 g 逼近，使 $\int^* |f - g| dx < \varepsilon$，则 f 为可积的函数.

定理 2.4.3. 函数 $f \in I^+$ 可积的充分与必要条件是

$$\int^* f dx < \infty.$$

现在假定 f 是一可积函数. 根据定义，可以取适当的 $g_n \in C_0$ 使得

$$\int^* |f - g_n| dx \to 0. \tag{2.4.1}$$

于是

$$\left|\int g_n dx - \int g_m dx\right| \leqslant \int |g_n - g_m| dx$$
$$\leqslant \int^* |f - g_n| dx + \int^* |f - g_m| dx \to 0,$$

根据柯西（Cauchy）收敛准则，$\int g_n dx$ 有一极限值． 此值是与 g_n 的选择无关的，因为如果 $h_n \in C_0$ 是另一序列使 $\int^* |f - h_n| dx \to 0$，则有

$$\left|\int g_n dx - \int h_n dx\right| \leqslant \int |g_n - h_n| dx$$
$$\leqslant \int^* |g_n - f| dx + \int^* |h_n - f| dx \to 0.$$

我们把 $\int g_n dx$ 的极限值（当 $n \to \infty$）叫做 f 的积分并记作 $\int f dx$.

根据定理 2.3.6，在一个零集合上改变函数 f 的定义，既不影响 f 的可积性，也不影响积分值 $\int f dx$. 两个可积函数，如果它们除了在一个零集之外相等，则可看成是等价的． 所有等价类组成的集合记作 L^1. 为了确定 L^1 的一个元素，只要几乎处处确定一个函数就够了．

练习． 设 $0 \leqslant f \in L^1$，试证 $\int f dx = \int^* f dx$.

定理 2.4.4. 若 $f, g \in L^1$ 和 $a, b \in \mathscr{R}$，则 $af + bg \in L^1$ 并且

$$\int (af + bg) dx = a \int f dx + b \int g dx. \tag{2.4.2}$$

（注意，$af + bg$ 几乎处处有意义．）其次，$\max(f, g)$，$\min(f, g) \in L^1$ 和

$$\int f dx \leqslant \int g dx, \quad \text{当 } f \leqslant g \tag{2.4.3}$$

成立。

证：利用不等式

$$|\max(f,g)-\max(f_0,g_0)|$$
$$\leqslant \max(|f-f_0|,|g-g_0|)\leqslant |f-f_0|+|g-g_0|$$

和定义(2.4.1)，我们立即得到 $\max(f,g)\in L^1$. (2.4.2)可按同样方法证明，同练习结合一起导出(2.4.3).

特别地，注意若 $f\in L^1$ 则 $|f|=\max(f,-f)\in L^1$.

练习. 设 $f\in L^1$，试证 $\int |f(x+h)-f(x)|dx$ 为 h 的连续函数.

我们补充一个练习，它表明定理 2.4.4 中的线性性质同可积性的联系.

练习. 设 $f\geqslant 0$ 和 $\int^* f dx<\infty$. 试证等式

$$\int^*(f+g)dx=\int^* fdx+\int^* gdx$$

对任意 $g\geqslant 0$ 成立的充要条件是 $f\in L^1$.

定理 2.4.5 [B. 莱维 (Beppo Levi)]. 设 $f_n\in L^1$，$f_n\uparrow f$，则 $f\in L^1$ 并且

$$\int fdx=\lim\int f_n dx，\text{当右端为有限；} \tag{2.4.4}$$

反之，若 $f\in L^1$，则右端为有限.

证：$\int f_n dx$ 关于 n 是递增的，并且其极限值当 $f\in L^1$ 时为有限，鉴于 $\int f_n dx\leqslant\int fdx$. 现在，假定极限

$$I=\lim\int f_n dx$$

存在，则当 $n\geqslant m$ 时

$$\int^*(f_n-f_m)dx=\int(f_n-f_m)dx\to$$
$$I-\int f_m dx,\quad n\to\infty,$$

从而(定理 2.2.2)

$$\int^* (f - f_m)dx = I - \int f_m dx \to 0, \text{ 当 } m \to \infty.$$

于是,定理 2.4.2 告诉我们 $f \in L^1$, 且鉴于 $\int f dx - \int f_m dx = \int (f - f_m)dx \to 0$ 当 $m \to \infty$, 故(2.4.4)成立.

定理 2.4.5 可以叙述成关于正项级数的一个定理: 若 $0 \leqslant u_n \in L^1$, 则 $\sum u_n \in L^1$ 的充分必要条件为 $\sum \int u_n dx < +\infty$, 其时

$$\int \left(\sum_1^\infty u_n\right) dx = \sum_1^\infty \int u_n dx.$$

由此我们看到,通过勒贝格积分, 关于正项级数的定理 1.2.1 得到了实质上的改进.

我们给出以后所需要的定理 2.4.5 的一个简单推论.

定理 2.4.6. 设 $f \geqslant 0$ 和 $\int^* f dx < \infty$. 则存在序列 $g_n \in I^+$ 使得 $f \leqslant g_n \downarrow g \in L^1$, 其中 $g \geqslant f$ 且

$$\int^* f dx = \int^* g dx = \int g dx.$$

若 $f \in L^1$, 则 $f = g$ 几乎处处成立.

将定理 2.4.6 作为练习. 借助于定理 2.4.6 可以给出定理 2.2.2 的一个容易的证明,即将其中任意非负函数改换成 L^1 中相应的某一函数便可.

不难看出, 对 $-f_n$ 应用定理 2.4.5, 可得关于 L^1 中递减函数序列 $\{f_n\}$ 的相应定理. 在下一定理中, 我们研究它对于非单调序列的推广.

定理 2.4.7 [法图 (Fatou) 引理]. 若 $f_n \geqslant 0$, 则

$$\int^* (\underline{\lim} f_n)\, dx \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int^* f_n dx. \tag{2.4.5}$$

进一步, 若 $f_n \in L^1$ (对一切 n) 同时上式右端为有限,则有

$$\underline{\lim} f_n \in L^1.$$

证: 假设对 $n \leqslant m$

$$h_{nm}=\min(f_n,\cdots,f_m).$$

则存在

$$\lim_{m\to\infty}h_{nm}=h_n(\text{下降}),\ \lim_{n\to\infty}h_n=\underline{\lim}f_n(\text{上升}).$$

其次,根据定理 2.2.2 和由于 $h_n\leqslant f_n$,有

$$\int^*\underline{\lim}\,f_ndx=\int^*\lim h_ndx=\lim\int^*h_ndx$$

$$\leqslant\underline{\lim}\int^*f_ndx,$$

由此(2.4.5)得证. 现在,若 $f_n\in L^1$ 对一切 n,则有

$$L^1\ni h_{nm}\downarrow h_n\geqslant 0,\ \text{当}\ m\to\infty,$$

由此,根据定理 2.4.5 知 $h_n\in L^1$. 假若 $\lim\int h_ndx<\infty$,同一定理断定 $\lim h_n=\underline{\lim}f_n\in L^1$. 若 $\underline{\lim}\int^*f_ndx<\infty$, 这就是上面所述情形.

练习. 设 $f_n=n^2|x|e^{-n|x|}(x\in\mathscr{R}^1)$, 确定(2.4.5)的两端.

定理 2.4.8 [勒贝格控制收敛定理]. 设 $f_n\in L^1$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 几乎处处成立. 进一步假设存在函数 $g(x)\geqslant 0$ 满足

$$\int^*gdx<\infty$$

并使得 $|f_n|\leqslant g$ 对一切 n. 则 $f\in L^1$ 并有

$$\int fdx=\lim_{n\to\infty}\int f_ndx. \tag{2.4.6}$$

证: 不带来任何附加限制,我们可以假定 $g\in L^1$, 这是因为可以用一个优函数 $h\in I^+$ 去替代 g, 这里, $h\in L^1$ 和 $\int^*hdx<+\infty$ 成立. 现在,我们对序列 $2g-|f-f_n|\geqslant 0$ 应用法图引理, 可得

$$\int 2gdx\leqslant\underline{\lim}\int^*(2g-|f-f_n|)dx.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\int^*|f_n-f_m|dx\leqslant 2\int^*gdx<+\infty,$$

再次利用法图引理，得知 $|f-f_n|\in L^1$。这也就是说，

$$\int^* (2g-|f-f_n|)\,dx=\int 2g\,dx-\int |f-f_n|\,dx,$$

故

$$\overline{\lim}\int |f-f_n|\,dx\leqslant 0,$$

从而 $f\in L^1$ 且(2.4.6)成立。

鉴于前一练习给出的例子，那里(2.4.6)是不成立的，可见条件 $|f_n|<g$ 对某个满足 $\int^* g\,dx<\infty$ 的 g 成立是必要的。

练习. 直接验证前一练习中的 $\sup_n f_n$ 不存在有限的上积分。

定理 2.4.9. 假设 $u_n\in L^1$ 和 $\sum_1^\infty\int|u_n|\,dx<\infty$，则级数

$$f(x)=\sum_1^\infty u_n(x) \tag{2.4.7}$$

几乎处处绝对收敛，并且 $f\in L^1$。其次，有

$$\int\left|f-\sum_1^n u_k\right|dx\to 0,\ 当\ n\to\infty. \tag{2.4.8}$$

证：根据定理 2.4.5，$F=\sum|u_n|$ 是 L^1 中的一个函数。级数 $\sum u_n(x)$ 对于每个满足 $F(x)<\infty$ 的点 x，从而对几乎所有 x，绝对收敛。所以(2.4.7)几乎处处存在。若令

$$f_n(x)=\sum_1^n u_k(x),$$

则 $|f_n|\leqslant F$ 对一切 n，并且几乎处处 $f_n\to f$。由定理 2.4.8，这表明 $f\in L^1$。又因 $F\geqslant|f-f_n|\to 0$ 当 $n\to\infty$ 几乎处处成立，从而，由定理 2.4.8，(2.4.8) 也成立。

练习. 利用

$$u_h^+=\max(u_h,0),\ u_h^-=\min(-u_h,0)$$

以及对级数 $\sum_1^\infty u_h^+$ 和 $\sum_1^\infty u_h^-$ 应用定理 2.4.5，给出定理 2.4.9 的一

个新证明.

练习. 假定 $f\in L^1$. 试证存在 $f_1,f_2\in I^+$ 使得 $f=f_1-f_2$ 几乎处处成立.(提示:首先证明 f 可以几乎处处表示成(2.4.7)的形式,其中 $f_n\in C_0$, 然后利用前一练习.)

练习. 证明若 $f\in L^1$(一元函数)则 $\sum_{-\infty}^{+\infty}f(x+n)$ 几乎处处收敛.

定理 2.4.10 [黎斯-菲舍尔 (Riesz-Fischer) 定理]. 若 $f_n\in L^1$ 且

$$\int|f_n-f_m|dx\to 0, \text{ 当 } n, m\to\infty, \tag{2.4.9}$$

则存在一个函数 $f\in L^1$ 使得

$$\int|f-f_n|dx\to 0, \text{ 当 } n\to\infty. \tag{2.4.10}$$

相反地,由(2.4.10)可以推出(2.4.9).

证:最后那个论断可由

$$\int|f_n-f_m|dx\leqslant\int|f-f_n|dx+\int|f-f_m|dx$$

直接推出. 为证前一论断,我们用 n_k 记这样的整数,它使得

$$\int|f_n-f_m|dx\leqslant 2^{-k}, \text{ 当 } n, m\geqslant n_k.$$

这样,有

$$\int|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|dx\leqslant 2^{-k}.$$

从而,根据定理 2.4.9, 对几乎所有的 x 和 $f\in L^1$, 极限

$$f(x)=f_{n_1}(x)+\sum_1^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$$

存在. 由(2.4.8),

$$\int|f-f_{n_k}|dx\to 0, \text{ 当 } k\to\infty.$$

现在,对任意 k 我们有

$$\int|f_m-f|dx\leqslant\int|f_{n_k}-f|dx+\int|f_m-f_{n_k}|dx,$$

让 m 和 k 同时地趋于 ∞，即得(2.4.10)。

如果不加选择的话，$f_n(x)$ 可能对某些 x 不收敛。下面的练习给出一个例子，那里我们假定维数是 1.

练习. 设 n 为一正整数而 m 为如此之整数使得 $m^3 \leqslant n \leqslant (m+1)^3$ 成立. 我们令

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leqslant n - m^3 - m|x| < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试证 $\int |f_n| dx \to 0$ 当 $n \to \infty$，但是 $\lim f_n(x)$ 对某些 x 不存在.

定理 2.4.10 完全类似于实数序列的柯西收敛准则. 前面的证明也是与柯西收敛准则的证明平行的，它以级数绝对收敛蕴含收敛的定理作为出发点.

§5. 可测和局部可积函数

为使一个函数 f 成为可积，除要求 f 有一定的正则性，同时还要 $|f|$ 具有某种局部和整体的有界性质（在 $\mathscr{R}^d$ 的紧致集上的和当 $x \to \infty$ 时的）. 这里，我们首先研究出自 L^1 但不带有界性限制的函数类.

定义 2.5.1. 一个在 $\mathscr{R}^d$ 上几乎处处定义和在 $[-\infty, +\infty]$ 上取值的函数 f，若

$$T_g f \in L^1, \text{ 对所有 } g \in C_0^+,$$

则称 f 为可测的，其中 $T_g f = \max(-g, \min(g, f))$（画图！）.

不难看出，在一个零集合上修改 f，不改变 f 的可测性. 定义也表明，若 f 为连续或者可积，则 f 为可测. 因为对一可积函数 f，$\int^* |f| dx = \int |f| dx < +\infty$，所以，若函数为可积，则必定可测. 下面的定理给出了可积与可测的关系.

定理 2.5.2. 函数 f 可积的充分与必要条件是 f 可测并且

$$\int^* |f| dx < +\infty.$$

证：在 C_0^+ 中选一适当 $\{g_n\}$，使得当 $n \to \infty$，对所有 $x \in \mathscr{R}^d$ 有 $g_n(x) \to +\infty$. 若 f 为可测，则有

$$L^1 \ni T_{g_n} f \to f, \text{ 当 } n \to \infty$$

和

$$|T_{g_n} f| \leqslant |f|, \text{ 对所有 } n.$$

根据勒贝格控制收敛定理，若 $\int^* |f| dx < +\infty$ 则 $f \in L^1$.

定理 2.5.2 常常是这样应用的：若 f 为可测且 $|f| \leqslant g \in L^1$，则 $f \in L^1$.

定理 2.5.3. 假设 $\{f_n\}$ 为一可测函数序列，并且 f_n 几乎处处收敛于 f 当 $n \to \infty$，则 f 为可测函数.

证：令 $g \in C_0^+$，则有

$$L^1 \ni T_g f_n \to T_g f \text{ a. e., 当 } n \to \infty.$$

其次，因 $|T_g f_n| \leqslant g$，这样一来，由勒贝格控制收敛定理知 $T_g f \in L^1$.

任一函数 $f \in I^+$ 是可测的，所以定理 2.4.3 是定理 2.5.2 的一个特例. 同时，定理 2.5.3 以及定理 2.5.2 的证明表明，f 为可测函数的充分必要条件是存在有界的 $f_n \in L^1$ 使得 $f = \lim f_n$. 由此我们得到

定理 2.5.4. 假定 f 和 g 可测，则 $\max(f, g)$ 和 $\min(f, g)$ 亦为可测. 进一步，若 f 和 g 几乎处处有限，则 $f + g$ 和 $f \cdot g$ 为可测.

证：这里我们只来证明 $f \cdot g$ 是可测的. 为此，注意到

$$f \cdot g = ((f + g)^2 - (f - g)^2)/4.$$

所以，只要证明一个可测函数的平方仍然是可测的就够了. 若 f 为可测，则存在有界的 $f_n \in L^1$，使 $f_n \to f$ 当 $n \to \infty$. 因为一个有界可积函数的平方是可积的，所以 f^2 为可测. 定理其余部分的证明留给读者作为练习.

对于一个可测函数的序列 $\{f_n\}$，定理 2.5.3 和定理 2.5.4 告诉我们 $\sup_n f_n$ 和 $\underline{\lim} f_n$ 皆是可测的.

从定理 2.5.2 和定理 2.5.4，我们得到

推论 2.5.5. 假定 $f\in L^1$，并假定 g 为可测和有界，则 $f\cdot g$ 为可积。

现在我们转向讨论这样的函数类，它是当仅仅把无穷远处有界的限制取消后从 L^1 所得到的函数类。

定义 2.5.6. 一个几乎处处定义在 $\mathscr{R}^d$ 上并在 $[-\infty,+\infty]$ 上取值的函数 f，若

$$f\cdot g\in L^1 \text{ 对所有 } g\in C_0^+,$$

则称 f 为局部可积的．所有局部可积函数的集合记作 L^1_{loc}。

练习. 假设 $f\in L^1_{\text{loc}}$．试证 f 几乎处处有限．

练习. 试证：a）若 $f\in {}^1_{\text{loc}}$，则 f 为可测；b）若 f 为局部有界(即于任一紧致集上有界)且可测，则 $f\in L^1_{\text{loc}}$。

定理 2.5.7. $f\in L^1_{\text{loc}}$ 的充分与必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在一个连续函数 g 使得 $\int^* |f-g|dx<\varepsilon$。

证：取 $h_n\in C_0^+$，$0\leqslant h_n\leqslant 1$ 并满足：$h_n(x)=1$ 当 $\|x\|\leqslant n$ 和 $h_n(x)=0$ 当 $\|x\|>n+1$．若 $f\in L^1_{\text{loc}}$，因 $h_n-h_{n-1}\in C_0^+$，我们可以选 $g_n\in C_0$ 使得

$$\int^* |f(h_n-h_{n-1})-g_n|dx<\varepsilon/2^n.$$

因为 $h_{n+1}(x)-h_{n-2}(x)=1$ 于 $\{x;n-1\leqslant\|x\|\leqslant n+1\}$(此集包含 h_n-h_{n-1} 的支集)，故上式乘以 $|h_{n+1}-h_{n-2}|$（$\leqslant 1$）得到

$$\int^* |f(h_n-h_{n-1})-g_n(h_{n+1}-h_{n-2})|dx<\varepsilon/2^n.$$

我们令

$$g=\sum_1^\infty g_n(h_{n+1}-h_{n-2}),$$

则

$$\int^* |f-g|dx=\int^* \left|f\left(\sum_1^\infty (h_n-h_{n-1})\right)\right.$$

$$- \sum_{1}^{\infty} g_n(h_{n+1} - h_{n-2}) \Big| dx < \sum_{1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

这里假定 $h_{-1} = h_0 = 0$. 此外,因 $h_{n+1} - h_{n-2}$ 的支集属于 $\{x; n-2 \leqslant \|x\| \leqslant n+2\}$,故任意点都有一个邻域,在其内,等式

$$g_n(h_{n+1} - h_{n-2}) = 0$$

除有限个之外对所有的 n 成立,从而 g 是连续的.

充分性的证明留给读者.

作为这节的结尾,我们以练习的形式给出 L^1_{loc} 的一些进一步性质.

练习. 若 f 可测且 $|f| \leqslant g \in L^1_{loc}$, 则 $f \in L^1_{loc}$.

练习. 若 $f, g \in L^1_{loc}$, 则 $|f|$, $af(a \in \mathscr{R})$, $f+g$, $\max(f, g)$ 和 $\min(f,g)$ 局部可积.

注意, 局部可积函数的乘积 $f \cdot g$ 不一定是局部可积. 然而, 我们有

练习. 若 $f \in L^1_{loc}$ 而 g 为局部有界和可测函数, 则 $f \cdot g \in L^1_{loc}$.

§6. 可测和可积集合

借助前一节的积分理论, 我们容易得到 $\mathscr{R}^d$ 中集合的一个测度理论.

定义 2.6.1. 设 E 为 $\mathscr{R}^d$ 的一个子集而 χ_E 为 E 的特征函数. E 的外测度由下式定义

$$m^*(E) = \int^* \chi_E \, dx.$$

若 χ_E 可积,则称 E 为可积,并且 E 的测度(勒贝格测度)定义为

$$m(E) = \int \chi_E \, dx = \int^* \chi_E \, dx = m^*(E).$$

相应地,若 χ_E 可测,则称 E 为可测.

根据定理 2.5.2, 若 E 可测且 $m^*(E) < +\infty$, 则 E 为可积.所以,对于可测集 E, 当 $m^*(E) < +\infty$ 时,我们可以用 $m(E)$ 代替

$m^*(E)$ 记 E 的测度.

外测度的进一步性质可由定理 2.2.2 直接得到,但我们将这些性质陈述作为一个新的定理.

定理 2.6.2. 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leqslant m^*(E_2)$. 若

$$E = \bigcup_1^\infty E_n,$$

则有

$$m^*(E) \leqslant \sum_1^\infty m^*(E_n). \tag{2.6.1}$$

若当 $n \to \infty$ 时 E_n 上升地趋于 E, 也就是说

$$E_n \subset E_{n+1} \text{ 对所有 } n \text{ 和 } E = \bigcup_1^\infty E_n,$$

则 $m^*(E_n) \uparrow m^*(E)$ 当 $n \to \infty$.

容易看出, $\chi_E \in I^+$ 的充分必要条件是 E 为开集. 所以, 开集在测度理论中起着与 I^+ 中函数在积分理论中同等的作用. 例如, 有

定理 2.6.3. 对任意集合 E,

$$m^*(E) = \inf_{O \supset E} m^*(O), \tag{2.6.2}$$

其中 O 取遍所有的开集.

证: 因 $E \subset O$, 故 $m^*(E) \leqslant m^*(O)$, 从而

$$m^*(E) \leqslant \inf m^*(O).$$

这样只需在 $m^*(E) < \infty$ 的假定下证明反方向的不等式就行了. 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $f \in I^+$ 使得 $\chi_E \leqslant f$ 和

$$\int^* f\,dx \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

令 O 是这样的开集,使于 O 内 $f(x) > 1 - \varepsilon$, 于是有 $E \subset O$, 并且若 $0 < \varepsilon < 1$ 则 $\chi_O \leqslant f/(1-\varepsilon)$, 从而

$$m^*(O) \leqslant (m^*(E) + \varepsilon)/(1 - \varepsilon).$$

因为 ε 可以任意小,故定理得证.

从前一节的定理, 可直接得到关于可测与可积集合的下述定

理。

定理 2.6.4. 一个可测集合的余集为可测集合．可数个可测集合的并集或交集仍是可测集．类似地，可测集的 $\underline{\lim}$ 和 $\overline{\lim}$ 也是可测集．可测集的对称差是可测的．任一开集和闭集为可测集．

定理 2.6.4 的证明留作练习．我们仅仅提醒下列事实．对于一个集合的序列 $\{E_n\}_1^\infty$，$\underline{\lim}\ E_n$ 和 $\overline{\lim}\,E_n$ 是通过特征函数的相应运算来定义的．记号 $\underline{\lim}\,E_n$ ($\overline{\lim}\,E_n$) 代表由属于除有限多个以外的所有 E_n（属于无限多个 E_n）的点所组成的集合．其次，对称差 $E_1\Delta E_2$ 是所有这样的点的集合，它仅仅属于 E_1 和 E_2 中的一个，因此 $E_1\Delta E_2$ 的特征函数为 $|\chi_{E_1}-\chi_{E_2}|$．最后，我们提醒，对于开集 E，$\chi_E\in I^+$．

对于可积集合的相应定理是：

定理 2.6.5. 可数多个可积集合的交集是可积的．一个开集或闭集为可积集合的充分与必要条件是其外测度为有限．特别地，任意一个紧致集合是可积的．若 $\{E_n\}_1^\infty$ 是一个可积集合的序列，则 $E=\bigcup\limits_1^\infty E_n$ 可积并且 $m(E)\leqslant\sum\limits_1^\infty m(E_n)$ 当不等式右端为有限时．又当 E_n 互不相交时，如下等式成立

$$m(E)=\sum_1^\infty m(E_n) \qquad (2.6.3)$$

（勒贝格测度的完全可加性质）．

对于一个不是可积的可测集合，人们有时也定义测度，按这种定义，测度＝外测度＝$+\infty$．在这种约定下，对于所有可测集，测度按集合是完全可加的．

定理 2.6.5 的证明留给读者．

练习． 证明 E 为可测集合的充分必要条件是：对所有紧致集 K，$E\cap K$ 皆为可测（可积）．

练习． 证明

$$m^*(E) = \inf \sum_1^\infty m(I_n),$$

其中 inf 是对所有满足 $\bigcup_1^\infty I_n \supset E$ 的区间序列 $\{I_n\}_1^\infty$ 取的。（提示：首先，注意每个开集 O 是可数多个区间 $J_1, J_2, \cdots$ 的并集，这些区间具有包含在 O 内的有理的顶点。然后，作新的区间 $J_{k_1}, \cdots, J_{kl}$，它们没有共同的内点，并且它们的并集是 $J_k \backslash (J_1 \cdots J_{k-1})$ 的闭包。）

特别地，E 为零集的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，存在区间序列 $\{I_n\}$ 使得 $E \subset \bigcup_1^\infty I_n$ 和 $\sum_1^\infty m(I_n) < \varepsilon$。这就是零集的通常的定义。

练习. 证明 E 为可积集合的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，存在有限多个区间 $I_1, \cdots I_k$ 使得

$$m^*(E \Delta (I_1 \cup \cdots \cup I_k)) < \varepsilon.$$

至此，我们有了在整个 $\mathscr{R}^d$ 上的积分。现在，令 f 为一个定义在可测集 E 上的函数，设：

$$f_0 = \begin{cases} f & \text{在 } E \text{ 上；} \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

如果 f_0 可积（可测），我们就说 f 是可积（可测）的，并记

$$\int_E f(x)\, dx = \int f_0(x)\, dx.$$

若 E' 是 E 的一个可测子集，根据定理 2.5.5，f 也在 E' 上可积（因 $\chi_{E'}$ 可测同时有界）。不难看出，前面关于可积与可测函数的定理可以直接地搬到定义在可测集上的函数上来。其次，根据前面的定理（如定理 2.4.4）直接可知，下面的公式成立：

$$\int_{E \cup E'} f(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx + \int_{E'} f(x)\, dx,$$

其中 E 和 E' 为不相交的可测集合。

以下，我们将限于陈述整个 $\mathscr{R}^d$ 上积分的理论。

练习. 证明 $f \in L^1_{loc}$ 的充分必要条件是 f 在任一紧致集上可积.

借助于定理 2.5.7，我们将给出可测集合的特性，在以测度理论为开端的教科书里，这通常是放在前面的.

定理 2.6.6. 关于 $\mathscr{R}^d$ 的子集 E 下列条件是等价的:

(1) E 是可测的;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个开集 $O \supset E$ 使得 $m^*(O \backslash E) < \varepsilon$;

(2′) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个闭集 $F \subset E$ 使得 $m^*(E \backslash F) < \varepsilon$;

(3) 存在一个下降的开集序列 $\{O_n\}_1^\infty$ 使得

$$O_n \supset E \text{ 和 } \bigcap_1^\infty O_n \backslash E \text{ 是一个零集;}$$

(3′) 存在一个上升的闭集序列 $\{F_n\}_1^\infty$ 使得

$$F_n \subset E \quad \text{和 } E \backslash \bigcup_1^\infty F_n \text{ 是一个零集.}$$

证: 因一集合为开集的充要条件是它的余集是闭集，所以只要证明(1)、(2)和(3)等价就够了.

假定(1)成立. 此时 χ_E 为局部可积. 根据定理 2.5.7 存在一个连续函数 g 使得 $\int^* |\chi_E - g|\, dx < \varepsilon/4$. 这也就是说，对某一 $h \in I^+$,

$$|\chi_E - g| \leqslant h \text{ 和} \int h\, dx < \varepsilon/4.$$

设

$$O = \{x; g(x) + h(x) > 1/2\},$$

因 $g + h$ 下方半连续，它是开集. 其次，不等式 $\chi_E \leqslant g + h$ 表明 $E \subset O$. 现在，若 $x \in O \backslash E$，则

$$g(x) + h(x) > \frac{1}{2} \text{ 且 } g(x) - h(x) \leqslant \chi_E(x) = 0,$$

因此 $2h(x) > \frac{1}{2}$. 这也就是说,有

$$\chi \leqslant 4\,h \text{ 和 } \int^* \chi\, dx \leqslant 4 \int^* h\, dx < \varepsilon,$$

其中 χ 是 $O \backslash E$ 的特征函数.

现在,假定(2)成立. 那么,可选 $O_n \supset E$ 使得 $m^*(O_n \backslash E) \to 0$ 当 $n \to \infty$. 通过以 $O_1 \cap O_2 \cdots \cap O_n$ 代 O_n,可以假定 $\{O_n\}_1^\infty$ 是下降的. 由于

$$0 \leqslant m^*\left(\bigcap_1^\infty O_n \backslash E\right) \leqslant m^*(O_n \backslash E) \to 0, \text{ 当 } n \to \infty,$$

故 $\cap O_n \backslash E$ 必为零集.

根据定理 2.6.4, (1)蕴含(3),定理的证明至此完成.

练习. 证明 E 为可积的充分必要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个开集 O 和一个紧致集 K 使得 $K \subset E \subset O$ 并且 $m(O \backslash K) = m(O) - m(K) < \varepsilon$.

练习. 假定 E 可积. 试证 $m(E) = \sup m(K)$, 这里 K 取遍 E 的所有紧致子集.

现在,我们给出一个不可测集合的例子. 对于实数 x 和 y, 若 $x - y$ 为有理数,则令 $x \sim y$, 即 x 与 y 等价. 据此, 实数被分成等价类. 让我们假定如下之作法是可能的, 即从每一等价类选择恰好一个元素, 如此我们得到一个集合 E, 它包含每个等价类中的一个而且仅仅一个元素(若承认选择公理,此作法是可能的).并且, 我们可以假定 E 是含于 $[0,1]$ 的. 这样, E 不可能是可测的. 因为若 $E_r = r + E = \{r + x; x \in E\}$, 则有

$$\bigcup_{r \in \mathscr{Q}} E_r = \mathscr{R} \tag{2.6.4}$$

和

$$E_r \subset (0,2) \text{ 若 } 0 < r < 1, \tag{2.6.5}$$

这里, $\mathscr{Q}$ 和 $\mathscr{R}$ 像通常那样表示有理数和实数的集合. 假若 E 可测, 因其外测度 $\leqslant 1$, 那么 E 一定是可积的. 这样一来,所有 E_r 具有同一测度,因为它们的差别仅仅是一个平移. 由于所有 E_r, $0 <$

$r<1, r\in Q$ 是不相交的,则 (2.6.5) 表明

$$\sum_{r\in\mathscr{Q}\cap(0,1)} m(E_r)\leqslant 2.$$

由于此级数有无穷多项,所有的项又相等，故 $m(E_r)=0$ 对所有的 r. 已知可数多个零集的并集仍是零集，所以，按照 (2.6.4), $(-\infty,+\infty)$势必就是零集了. 这个矛盾证明E是不可测的.

现在，我们来证明这里关于可测性的定义是与通常的定义完全一致的.

定理 2.6.7. f 是可测的充分与必要条件是：对任意实数 a, $\{x;f(x)>a\}$ 为可测集.

证：a）必要性　因为若 f 为可测，则 $f-a$ 为可测,故可假定 a 是零,从而归之于证明 $E=\{x;f(x)>0\}$ 为可测集. 因为 $\chi_E=\lim\limits_{n\to\infty}\min(nf^+,1)$, 其中 $f^+=\max(f,0)$, 所以E确实为可测集.

b）充分性　设 $[t]$ 表示 $<t$ 的最大整数,并令

$$f_n=\frac{1}{n}[nf].$$

若 $[nf(x)]=k$, 则 $k/n<f(x)\leqslant(k+1)/n$ 且 $f_n(x)=k/n$, 所以 $0\leqslant f-f_n\leqslant\frac{1}{n}$ 并且

$$f_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}\chi_{E_{nk}},$$

其中 $E_{nk}=\{x;k/n<f(x)\leqslant(k+1)/n\}$ 是可测的. 由此可知 f_n 可测,从而 $f=\lim f_n$ 为可测.

练习. 假定 f 可测和 ϕ 在 $\mathscr{R}$ 上连续或者上升，试证 $\phi\circ f$ 可测(假定 f 几乎处处有限).

最后，我们来证明几个表明可测性与连续性之间关系的定理.

定理 2.6.9[*]** [鲁金 (Лузин) 定理]. 设 f 是一个几乎处处有

---

[*] 原书漏掉定理号 2.6.8, 译文未加更动. ——编者注

限的可测函数．则对于任意 $\varepsilon > 0$，可以找到一个闭集 F，使得 f 在 F 上的限制是连续的，并且 $m(F^C) < \varepsilon$．反之，具有上述性质的函数是可测的．

证：a）必要性　令 $\phi(x) = x/(1+|x|)$ 它是从 $\mathscr{R}$ 到 $(-1, +1)$ 的单调上升连续函数，并令 $\phi(\pm\infty) = \pm 1$．由于 f 的可测性和连续性跟函数 $\phi\circ f$ 的同样性质是等价的，所以，没有附加任何限制，我们可以假定 $f \in L^1_{\text{loc}}$．根据定理 2.5.7，我们选一连续函数序列 $\{g_n\}$ 使得 $\int^* |f - g_n|\, dx < 4^{-n}$．并取 h_n 使

$$\int^* h_n\, dx < 4^{-n} \text{ 和 } |f - g_n| \leqslant h_n \in I^+.$$

设 $E_n = \{x; h_n(x) > 2^{-n}\}$，则

$$2^{-n}\chi_{E_n} \leqslant h_n \text{ 和 } m^*(E_n) \leqslant 2^n \int^* h_n\, dx < 2^{-n},$$

故

$$m^*\left(\bigcup_{n \geqslant N}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_N^{\infty} m^*(E_n) \leqslant \sum_N^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$$

对充分大的 N．

我们取

$$F = \bigcap_{n \geqslant N}^{\infty} E_n^C,$$

因为 $h_n \in I^+$ 蕴含着 E_n 为开集，所以 $m^*(F^C) < \varepsilon$ 并且 F 为闭集．其次，当 $n \to \infty$ 时 h_n 在 F 上一致趋于零，从而 $f - g_n$ 在 F 上一致趋于零．事实上，$x \in F$ 蕴含 $x \notin E_n$，从而

$$0 \leqslant h_n(x) \leqslant 2^{-n} \text{ 当 } n \geqslant N.$$

已知一个连续函数序列的一致收敛极限仍是连续的，所以 f 在 F 上的限制为连续．

b）充分性　若定理的条件成立，则可找到一个闭集序列 $\{F_n\}$，使对任意 n，f 在 F_n 上的限制为连续并且 $\sum m(F_n^C) < \infty$．令

$$f_n = \begin{cases} f & \text{在 } F_n \text{ 上;} \\ +\infty & \text{在} F_n^C \text{ 上,} \end{cases}$$

则 f_n 为下半连续，从而为可测．当 $n \to \infty$ 时，除零集 $\overline{\lim} F_n^C$ 之外 f_n 收敛到 f，根据定理 2.5.3，f 为可测，由此定理得证．

布巴基把鲁金定理作为可测函数的定义，当考虑向量值函数时，这是有好处的．

鲁金定理同定理 2.6.6 的(2)和(2′)一起告诉我们：一个在可测集 E 上连续的函数，它在 E 上是可测的．

练习． 试证：假若 f 是一可测集的特征函数，则鲁金定理可由定理 2.6.6 的(2)和(2′)得到．

注意鲁金定理并未断言可测函数在任意点连续．例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为无理数;} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \end{cases}$$

为可测，然而此函数在任何点处都不连续．

对于黎曼积分，情况则是另一个样．我们仅定义了具紧致支集函数的积分，对于这种函数，有如下结论：

定理 2.6.10. 一个具紧致支集的函数为黎曼可积的充分必要条件是它有界且其不连续点构成一个零集．

证：令 $f_1(x) = \underline{\lim}_{y \to x} f(y)$ 和 $f_2(x) = \overline{\lim}_{y \to x} f(y)$．则 $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ 和 $f_1(f_2)$ 为下(上)方半连续（试证之作为练习）．若 ϕ 属于 C_0 和 $\leqslant f$，则有 $\phi \leqslant f_1$．从而

$$\int \phi \, dx \leqslant \int f_1 \, dx,$$

由此可得

$$\underline{\int} f \, dx \leqslant \int f_1 \, dx.$$

因为 $f_1 \leqslant f$，故反方向的不等式也成立，从而

$$\underline{\int} f \, dx = \int f_1 \, dx.$$

类似地，可得 $\overline{\int} f \, dx = \int f_2 \, dx$．由于 I^+ 中函数的黎曼下积分等于它的勒贝格积分，所以，利用 f_1 和 f_2 在勒贝格意义下的积分我们

得到

$$\int f\,dx = \int f_1\,dx, \int f\,dx = \int f_2\,dx.$$

这也就是说，f 为黎曼可积的充要条件是

$$\int (f_2 - f_1)\,dx = 0,$$

所以 $f_2 = f_1$ a. e.，即 f 为几乎处处连续。

对鲁金定理的证明作类似的修改，可以得到

定理 2.6.11 [叶果洛夫（Егоров）定理]. 假设 f_n 为一个几乎处处取有限值的函数序列，它几乎处处趋于一个几乎处处有限的极限 f. 若所有的 f_n 为可测，则对任一紧致集 K 和 $\varepsilon > 0$，可以找到一个紧致集 $K_1 \subset K$ 使得 $m(K \backslash K_1) < \varepsilon$ 并且 f_n 在 K_1 上一致收敛于 f.

证：令

$$h_n(x) = \sup_{m>n} |f - f_m|,$$

这里，约定 $h_n = +\infty$ 当 f 或者某个 f_m 为无限时. 根据假设，h_n 在一个零集合之外单调地趋于零. 从而，可测集

$$E_{n,\delta} = \{x; x \in K, h_n(x) > \delta\}$$

随 n 下降，并且对任一 $\delta > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} E_{n,\delta}$ 为零集. 因 $E_{n,\delta} \subset K$ 和 K 为一可测集，故由勒贝格控制收敛定理有 $m(E_{n,\delta}) \to 0$ 当 $n \to \infty$. 所以，对 $j = 1, 2, \cdots$，我们可以选 N_j 足够大使得 $e_j = E_{N_j, 1/j}$ 满足

$$m(e_j) < \varepsilon/2^j, h_n(x) \leqslant 1/j \text{ 当 } n \geqslant N_j,\ x \in K \backslash e_j.$$

这里，最后那个推断是根据 $E_{n,\delta}$ 的定义. 令 $e = \bigcup e_j$，则 e 可测且 $m(e) < \varepsilon$. 对 $x \in K \backslash e$，有 $h_n(x) \leqslant 1/j$ 当 $n \geqslant N_j$，即在 $K \backslash e$ 上 h_n 一致地趋于零. 现在，有

$$m(K \backslash e) = m(K) - m(e) > m(K) - \varepsilon,$$

故可找到一个紧致集 $K_1 \subset K \backslash e$ 使得 $m(K_1) > m(K) - \varepsilon$. 由此可知 $m(K_1 \backslash K) < \varepsilon$ 和在 K_1 上 f_n 一致收敛到 f. 定理证毕.

练习. 证明勒贝格控制收敛定理和鲁金定理是叶果洛夫定

理的推论。

§7. 变量替换

首先，注意到若 O 是 $\mathscr{R}^d$ 的开集，则可对仅在 O 内有定义的函数定义上积分和积分，作法与以前类似，先从 $C_0(O)$（即具紧致支集属于 O 的连续函数类）入手。我们留作练习，要读者往证：$f\in L^1(O)$ 的充分与必要条件是在 O 内取值为 f 而在 O 外取值为零的函数属于 $L^1(\mathscr{R}^d)$。

现在，设 O_1 和 O_2 是 $\mathscr{R}^d$ 的两个开集，并设 ϕ（如同在定理 1.4.5 中）是一个从 O_1 到 O_2 的一对一映射，并且 ϕ 和 ϕ^{-1} 都是连续可微的。若 f 是一个定义在 O_2 内的函数，象在第一章 §4 里那样，我们将 $f\circ\phi$ 记作 ϕ^*f.

定理 2.7.1. $f\in L^1(O_2)$ 的充分与必要条件是 $(\phi^*f)|\det\phi'|\in L^1(O_1)$，并且有

$$\int_{O_2} f\,dx=\int_{O_1}(\phi^*f)|\det\phi'|\,dx. \tag{2.7.1}$$

证：据定理 1.4.5 知，当 $f\in C_0(O_2)$ 时，(2.7.1)为真。鉴于我们可取一序列 $f_n\in C_0^+(O_2)$ 且 $f_n\uparrow f$，由此立即可得

$$\int^* f\,dx=\int^*(\phi^*f)|\det\phi'|\,dx,\ \text{对}\ f\in I^+(O_2). \tag{2.7.2}$$

注意 $\phi^*f\in I^+(O_1)$，且根据连续可微逆映射 ϕ^{-1} 的存在性知

$$\det\phi'\neq 0,$$

故映射 $I^+(O_2)\ni f\to(\phi^*f)|\det\ \phi'|\in I^+(O_1)$ 是一对一的满射。由此立即得知，对于任一函数 $f\geqslant 0$ 的上积分，(2.7.2) 成立。这样一来，存在一个函数 $g\in C_0(O_2)$，使 $\int^*|g-f|\,dx<\varepsilon$ 这一命题等价于

$$\int^*|g_1-(\phi^*f)|\det\phi'||\,dx<\varepsilon,$$

其中 $g_1=(\phi^*g)|\det\phi'|$。这就证明了：$f\in L^1(O_2)$ 当而且仅当

$(\phi^* f)|\det\phi'| \in L^1(O_1)$，并且鉴于此式当 $f \in C_0(O_2)$ 时为真，此时亦有(2.7.1)成立.

§8. 累次积分，勒贝格-傅比尼定理

这里我们将考虑 $(x, y) \in \mathscr{R}^{d+e}$ 的函数 f，其中 $x \in \mathscr{R}^d$ 和 $y \in \mathscr{R}^e$. 若 $f \in C_0(\mathscr{R}^{d+e})$，从第一章 § 3 我们知道

$$\iint f\, dx\ dy = \int \left(\int f\, dx \right) dy , \tag{2.8.1}$$

其中左端表示 $\mathscr{R}^{d+e}$ 上函数 f 的积分，而右端则是 f 先就固定的 x 对 y 积分，然后将所得结果再对 x 积分. 现在，我们来证明(2.8.1)在勒贝格意义下成立. 为此，象往常那样从考虑 I^+ 中的函数开始.

定理 2.8.1. 设 f 作为 (x, y) 的函数属于 I^+. 则对固定的 x，f 视作 y 的函数属于 I^+，而且 $\int^* f(x, y)\, dy$ 作为 x 的函数也属于 I^+ 并有

$$\iint^* f\, dx\ dy = \int^* \left(\int^* f\, dy \right) dx . \tag{2.8.2}$$

证：我们能够取 $f_n \in C_0$ 使 $0 \leqslant f_n \uparrow f$. 这就表明 $f(x, y)$ 对固定的 x 视作 y 的函数属于 I^+，并且

$$g_n(x) = \int f_n(x, y)\, dy \uparrow \int^* f(x, y)\, dy = g(x).$$

因 $0 \leqslant g_n \in C_0$，我们得到 $g \in I^+$ 和

$$\int^* g\, dx = \lim \int g_n\, dx = \lim \iint f_n\, dx\ dy$$

$$= \iint^* f\, dx\ dy ,$$

这里我们用到(2.8.1)对 f_n 成立. (2.8.2)证毕.

定理 2.8.2. 对任意 $f \geqslant 0$ 有

$$\int^* \left(\int^* f\, dy \right) dx \leqslant \iint^* f\, dx\ dy . \tag{2.8.3}$$

证：若 $f \leqslant g \in I^+$，由上积分的单调性，

$$\int^*\left(\int^* f\,dy\right)dx \leqslant \int^*\left(\int^* g\,dy\right)dx = \iint^* g\,dx\,dy,$$

其中最后的等式是根据定理 2.8.1。因为右端的下确界是

$$\iint^* f\,dx\,dy,$$

故(2.8.3)成立。

练习. 证明若 $f(x, y) = g(x)h(y)$，则 (2.8.3) 中的等号成立。

练习. 设 g_1 和 g_2 为 x 的非负函数，则

$$\int^*(g_1 + g_2)\,dx < \int^* g_1\,dx + \int^* g_2\,dx. \qquad (2.8.4)$$

(见定理 2.4.5 前面的练习)设 h_1 和 h_2 是 $\mathscr{R}^e$ 中互不相交，测度皆是 1 的两个开集的特征函数，并设

$$f(x,y) = g_1(x)h_1(y) + g_2(x)h_2(y).$$

试证(2.8.3)的两端分别地与(2.8.4)的对应端相等。 这也就是说，(2.8.3)中的等号不一定成立.

推论 2.8.3. 若 f 是一个零函数，则 $y \to f(x,y)$ 对几乎所有的 x 为一零函数.

定理 2.8.4 [勒贝格-傅比尼 (Fubini)]. 若 $f \in L^1(\mathscr{R}^{d+e})$，则 $\mathscr{R}^e \ni y \to f(x,y)$ 对几乎所有的 $x \in \mathscr{R}^d$ 为可积，同时，函数

$$\mathscr{R}^d \ni x \to \int f(x,y)\,dy$$

几乎处处有定义且可积，并有

$$\iint f\,dx\,dy = \int\left(\int f\,dy\right)dx. \qquad (2.8.5)$$

证：选 $g_n \in C_0$ 使

$$\sum \iint^* |f - g_n|\,dx\,dy < \infty,$$

这表明

$$\int^*\left(\sum \int^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dy\right)dx$$

$$\leqslant \sum \int^* \left(\int^* |f - g_n| \, dy \right) dx$$

$$\leqslant \sum \iint^* |f - g_n| \, dx \, dy < \infty,$$

所以级数 $\sum \int^* |f(x,y) - g_n(x,y)| \, dy$ 对几乎所有的 x 收敛．特别地，级数中的一般项对几乎所有的 x 趋于零．由此可知，函数 $y \to f(x,y)$ 对几乎所有的 x 为可积．因此,函数

$$F(x) = \int f(x,y) \, dy$$

几乎处处有定义．令 $G_n(x) = \int g_n(x,y) \, dy$ ，则 $G_n \in C_0$ 且

$$\int^* |F - G_n| \, dx \leqslant \int^* \left(\int^* |f(x,y) - g_n(x,y)| \, dy \right) dx$$

$$\leqslant \iint^* |f - g_n| \, dx \, dy \to 0.$$

从而，F 可积并有

$$\int F \, dx = \lim \int G_n \, dx = \lim \iint g_n \, dx \, dy$$

$$= \iint f \, dx \, dy ,$$

由此定理得证.

定理 2.8.4 中的函数 $y \to f(x,y)$ 一般说来不一定对所有 x 是可积的．事实上，在一固定 x 处，$f(x,y)$ 的任意变动不影响其在 R^{d+c} 上的可积性.

练习. 设 $f(x,y) = g(x)h(y)$，其中 g 和 h 可积(可测)．试证 f 为可积(可测).

练习. 设 $f, g \in L^1(R^d)$．试证对几乎所有的 x 存在

$$h(x) = \int f(x - y) g(y) dy,$$

并证明 $h \in L^1(R^d)$ 和

$$\int |h| dx \leqslant \int |f| dx \int |g| dx.$$

练习. 若 $f(x,y)$ 可测，试证 $x \to \int^* |f(x,y)|dy$ 为可测和 $y \to f(x,y)$ 对几乎所有的 x 为可测.

注意，即使(2.8.5)的右端存在，我们仍不能断定左端存在. 推论 2.8.3 前面那个练习给出一个说明的例子，即特别地取 g_1 和 g_2 使 $g_1 + g_2 \in L^1$. 另一方面，我们有

定理 2.8.5. 若 f 可测，则当而且仅当

$$\int\left(\int|f(x,y)|dy\right)dx < \infty \tag{2.8.6}$$

时 f 为可积.

证：若 f 可积，则 $|f|$ 亦可积，同时勒贝格—傅比尼定理表明(2.8.6)成立. 当我们证明反方向的论断时，据定理 2.5.2，可以假定 $f \geqslant 0$. 选 $g_n \in C_0^+$ 使对所有 $(x,y) \in R^{d+e}$，$g_n(x,y) \uparrow +\infty$，当 $n \to \infty$. 当 $f \geqslant 0$ 为可测函数时，有

$$L^1 \ni T_{g_n}f \uparrow f.$$

那么，由于

$$\begin{aligned}\iint T_{g_n}f dxdy &= \int\left(\int T_{g_n}f dy\right)dx \\ &\leqslant \int\left(\int f dy\right)dx < +\infty,\end{aligned}$$

和 B. 莱维定理，有 $f \in L^1$.

定理 2.8.4 和定理 2.8.5 表明，对于一个满足 (2.8.6) 的可测函数 f，下式成立

$$\int\left(\int f(x,y)dy\right)dx = \int\left(\int f(x,y)dx\right)dy. \tag{2.8.7}$$

特别地，当 f 为可测并且是非负的时候，如果其中每个积分都存在，则可以改变积分的次序. 这里，$f \geqslant 0$ 的假定是关键的.

练习. 试证下面两个累次积分

$$\int_0^1\left(\int_0^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy})dy\right)dx,$$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})dx\right)dy$$

是不等的(有不等号！).

定理 2.8.5 的另一个推论为：$\mathscr{R}^{d+e}$ 的一个可测子集为零集的充分与必要条件是

$$E_x = \{y \in R^e;\ (x, y) \in E\}$$

对几乎所有的 x 为零集. 特别地，若 E 可测并且 E_x 对几乎所有的 x 是零集，则 E 为零集. E 为可测集的条件是关键的，即使对每个 x，E_x 是一个点，这个条件也是不能去掉的.

§9. L^p 空间

设 $1 \leqslant p < \infty$. 现在，我们来定义 L^p，包括 $p > 1$ 的情形. 这里，我们选择一个基于定理 2.5.2 的定义，当 $p = 1$ 时它等价于原来的 L^1.

定义 2.9.1. 若 f 可测且

$$\|f\|_p = \left(\int^* |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{2.9.1}$$

则说 f 属于 L^p.

根据定理 2.5.2，(2.9.1)等价于 $|f|^p \in L^1$ 故其中的上积分可以改写成积分.

定理 2.9.2 [霍尔德尔 (Hölder) 不等式]. 若 $f \in L^p$ 和 $g \in L^q$，这里

$$1 < p < \infty,\ 1 < q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

则 $f \cdot g$ 为可积函数并且

$$\left|\int f \cdot g dx\right| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \tag{2.9.2}$$

反过来，若 $f \in L^p$ 和

$$\left|\int f \cdot g dx\right| \leqslant C\|g\|_q,\ g \in L^q, \tag{2.9.3}$$

则 $\|f\|_p \leqslant C$.

证：设 $\frac{1}{p}=\alpha$，$\frac{1}{q}=\beta$. 则 $\alpha+\beta=1$ 并且数 α 和 β 为正的. 对任意非负数 a 和 b，下述算术-几何不等式成立

$$a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\leqslant \alpha a+\beta b,$$

这是因为若令 $a=e^{A}$，$b=e^{B}$ 此不等式根据 e^{x} 的凸性是成立的. 现在，令 $a=|f(x)|^{p}$ 和 $b=|g(x)|^{q}$，我们得到

$$|f(x)g(x)|\leqslant \alpha|f(x)|^{p}+\beta|g(x)|^{q},$$

故有

$$\int^{*}|fg|dx\leqslant \alpha\|f\|_{p}^{p}+\beta\|g\|_{q}^{q}.$$

根据定理 2.5.2 和定理 2.5.4，上式表明 $fg\in L^{1}$. 若 $\|f\|_{p}=\|g\|_{q}=1$，由于 $\alpha+\beta=1$，知(2.9.2)成立. 又因不等式(2.9.2)关于 f 和 g 是齐次的，所以一般情形它也成立. 另一方面，若(2.9.3)成立，我们在 $f\neq 0$. 处定义

$$g=|f|^{p}/f,$$

并定义 g 为零当 $f=0$，则这是一个可测函数且 $|g|^{q}=|f|^{p}$，故 $\int^{*}|g|^{q}dx<\infty$，所以 $g\in L^{q}$. 这时由 (2.9.3) 我们得到 $\|f\|_{p}^{p}\leqslant C\|f\|_{p}^{p/q}$，从而 $\|f\|_{p}\leqslant C$.

在第三章 § 7 里，我们将给出定理 2.9.2 的一个非常一般的形式.

练习. 证明当把霍尔德尔不等式中的积分改成上积分时，它对于任意 f，$g\geqslant 0$ 成立.

定理 2.9.3 [闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式]. 若 f，$g\in L^{p}$，则 $f+g\in L^{p}$ 并且

$$\|f+g\|_{p}\leqslant \|f\|_{p}+\|g\|_{p}. \tag{2.9.4}$$

证：根据定理 2.5.4，$f+g$ 是可测的. 其次，估计式

$$|f+g|\leqslant 2\underline{\max}(|f|,|g|)$$

表明 $|f+g|^{p}\leqslant 2^{p}(|f|^{p}+|g|^{p})$，从而 $\int^{*}|f+g|^{p}dx<\infty$，即 $f+g\in L^{p}$. 若 $h\in L^{q}$，这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (可以假定 $p>1$)，由

霍尔德尔不等式知

$$\left|\int(f+g)hdx\right| \leqslant \left|\int fhdx\right| + \left|\int ghdx\right|$$
$$\leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\|h\|_q,$$

根据定理 2.9.2 的后一部分,(2.9.4)由此得证.

练习. 将不等式(2.9.4)推广到 f 和 g 不一定可测的情形.

下面定理给出 L^p 的一个等价定义，它与 § 4 中原来 L^1 的定义相似.

定理 2.9.4. $f \in L^p$ 的充分与必要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，可以找到 $g \in C_0$，使得

$$\int^* |f-g|^p dx < \varepsilon^p. \tag{2.9.5}$$

证：a) 必要性　令 $f_n(x) = f(x)$ 当 $\frac{1}{n} < |f(x)| < n$，否则令 $f_n(x) = 0$. 则 $f_n(x)$ 为可测. 由于 $|f_n| \leqslant |f|$，故 $f_n \in L^p$. 又因 $|f_n| \leqslant n^{p-1}|f_n|^p$，所以同时有 $f_n \in L^1$. 由于 $|f|^p \geqslant |f - f_n|^p \to 0$，根据勒贝格控制收敛定理，对给定的 $\varepsilon > 0$，我们可以选充分大的 n，使得

$$\|f-f_n\|_p^p = \int |f-f_n|^p dx < \varepsilon^p.$$

现在,固定 n 并取 $g \in C_0$，使

$$\int |f_n - g| dx < \varepsilon^p/(2n)^{p-1}.$$

因为若用 $\max(-n, \min(n, g))$替代上式中的 g，不导致左端增大,故可假定 $|g| \leqslant n$. 于是 $|f_n - g| < 2n$，从而

$$\|f_n - g\|_p^p = \int |f_n - g|^p dx < \varepsilon^p.$$

现在,由闵可夫斯基不等式,即得 $\|f-g\|_p < 2\varepsilon$.

b) 充分性　设 h 是 L^q 中处处不为零的连续函数,则由定理 2.9.2 后面的练习和 (2.9.5) 有

$$\int^* |fh - gh| dx \leqslant \|h\|_q \|f-g\|_p < \|h\|_q \varepsilon,$$

故 fh 可积从而可测. 又因 $1/h$ 是连续函数,所以 f 可测, 至此定理证毕.

现在,我们推广黎斯—菲舍尔定理(定理2.4.10)到 $p>1$ 的情形.

定理 2.9.5. 若 $f_n\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$, 同时 $\|f_n-f_m\|_p\to 0$, 当 $n,m\to\infty$. 则存在 $f\in L^p$ 使得 $\|f-f_n\|\to 0$, 当 $n\to\infty$.

证: 如同定理 2.4.10 的证明,取序列 n_k 使

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p<\infty.$$

设 h 是 L^q 中的连续函数,它处处不等于零. 由霍尔德尔不等式,有

$$\sum_{1}^{\infty}\|hf_{n_k}-hf_{n_{k+1}}\|_1<\infty.$$

这表明(见定理 2.4.10 的证明) $\lim\limits_{k\to\infty}hf_{n_k}$ 几乎处处存在. 那么,

$$f=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}$$

几乎处处存在,并且可测. 对任给 $\varepsilon>0$, 我们可选N使

$$\|f_m-f_n\|_p<\varepsilon,\ 当\ m,n>N.$$

故当 k 充分大时,

$$\int|f_m-f_{n_k}|^p dx<\varepsilon^p,\ 对\ m>N.$$

从而,根据法图引理, $|f_m-f|^p$ 可积,且

$$\int|f_m-f|^p dx\leqslant\varepsilon^p,\ 当\ m>N.$$

可见 $f\in L^p$ 和 $\|f_m-f\|_p\to 0$, 当 $m\to\infty$. 至此定理证明完成.

最后,我们引进空间 L^∞, 它由所有这样一些函数 f 组成, 即对每个 f 存在一个常数 C 使 $|f(x)|<C$ 几乎处处成立. 确实存在一个最小的具有上述性质的常数(作为练习予以证明). 我们定义 $\|f\|_\infty=$ 这个最小的常数. 注意, 霍尔德尔不等式对 $p=1$ 和 $q=\infty$ 仍然成立.

练习. 假定 $f\in L^\infty$, 同时 $f\in L^p$ 对任意 $p<\infty$, 试证

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|f\|_p.$$

§ 10. 勒贝格积分的微商

下面的勒贝格定理对积分理论在三角级数、调和函数及其他许多领域中的应用是很基本的.

定理 2.10.1. 若 $f\in L^1_{\text{loc}}$，则对几乎所有的 x

$$f(x) = \lim_{m(S)\to 0}(m(S))^{-1}\int_S f dy, \tag{2.10.1}$$

其中 S 记包含点 x 的球. 除此之外，对几乎所有的 x 我们有

$$\lim_{m(S)\to 0}(m(S))^{-1}\int_S |f(y)-f(x)|dy \to 0. \tag{2.10.2}$$

若 f 为连续，由中值定理上述定理显然成立. 为给出一般情形的证明，我们研究函数

$$\tilde{f}(x) = \sup_{x\in S}(m(S))^{-1}\int_S |f|dy, \tag{2.10.3}$$

其中 S 仍然表示包含点 x 的球.

练习. 证明 $\tilde{f}$ 是下方半连续函数，即 $\tilde{f}\in I^+$.

定理 2.10.2. 若 $f\in L^1_{\text{loc}}$，则有不等式

$$m\{x;\tilde{f}(x)>s\}\leqslant\frac{4^d}{s}\int^* |f|dx. \tag{2.10.4}$$

证: 不妨假定 $f\in L^1$. 要估计的是集合 $E_s=\{x;\ \tilde{f}(x)>s\}$ 的测度. 显然，E_s 是一族球 F 的并集，$|f|$ 在 F 的每一个球上的平均值 $>s$. 我们将证明，可以在 F 中找到一个序列 S_k，它们是互不相交的，并能使 $E_s\subset\bigcup S'_k$，其中 S'_k 是 S_k 的同心球，它的半径是 S_k 的四倍. 由此得到

$$m(E_s)\leqslant\sum m(S'_k) = 4^d\sum m(S_k)$$
$$\leqslant 4^d s^{-1}\sum_k\int_{S_k}|f|dx.$$

由于 S_k 互不相交，所以(2.10.4)成立.

为证 S_k 的存在性，我们首先注意: 由于当 $S\subset F$ 时 $m(S)<$

$s^{-1}\int|f|dy$，所以 F 中的球的半径是上方有界的．记此上界为 R_1 并选 S_1 使其半径 $r_1>2R_1/3$．假设互不相交的球 $S_1,\cdots,S_{k-1}$ 已经选出，并令 R_k 是 F 中与 $S_1,\cdots,S_{k-1}$ 不相交的球的半径的上界．那末，我们在 F 中选半径为 r_k 的球 S_k，它与前面那些球不相交，并且 $r_k>2R_k/3$．

假若上述过程进行到某一有限 k 而告终，此时定义 $R_k=0$． 否则，我们得到一个无穷序列 $\{S_k\}$，其时 $\lim R_k=0$． 由于 S_k 互不相交，故

$$\sum m(S_k)\leqslant s^{-1}\int|f|dx<\infty,$$

从而 $m(S_k)\to 0$，这表明 r_k 和 R_k 趋于零．

现在，设 $x\in E_s$，则存在 $S\in F$ 使 $x\in S$．若 S 的半径为 r，则 S 必定与某一球 S_k 相交，因为不然的话，将有 $R_k\geqslant r$ 对所有 k．选 k 使 S 与 $S_1,\cdots,S_{k-1}$ 不相交，但同 S_k 相交． 设 x_k 是 S_k 的中心，则有

$$\|x-x_k\|\leqslant 2r+r_k\leqslant 2R_k+r_k\leqslant 4r_k,$$

故 $x\in S'_k$，由此定理得证．

通常地，称定理 2.10.2 为哈代（Hardy）最大定理．当 $d=1$ 时，除记号之外，这就是通常的黎斯引理．

定理 2.10.1 的证明：设对 $\varepsilon>0$

$$E_\varepsilon=\left\{x;\ \overline{\lim_{m(S)\to 0,x\in S}}\ m(S)^{-1}\int_S|f(y)-f(x)|dy>\varepsilon\right\},$$

则对任意 $x\in E_{2\varepsilon}$，$|\tilde{f}(x)|>\varepsilon$ 或者 $|f(x)|>\varepsilon$ 成立． 因 $\varepsilon m\{x;|f(x)|>\varepsilon\}\leqslant\int^*|f|dx$，故由定理 2.10.2 我们得到

$$m^*(E_{2\varepsilon})\leqslant(4^d+1)\varepsilon^{-1}\int^*|f|dx.$$

注意，用 $f-g$ 替代 f 不改变 $E_{2\varepsilon}$，这里 $g\in C$，这是因为

$$m(S)^{-1}\int_S|g(y)-g(x)|dy\to 0,\ \text{当}\ m(S)\to 0,\ x\in S.$$

现在，可以选 g 使得 $\int^*|f-g|dy$ 随意地小，故有 $m^*(E_{2\varepsilon})=0$，

从而 $E = \bigcup_{1}^{\infty} E_{1/k}$ 是一零集，并且在它的余集中 (2.10.2) 成立.

练习. 试证定理 2.10.2 和定理 2.10.1 在下述情形仍然成立：把其中仅仅考虑含 x 的球 S 代之以考虑所有那样的可测集合 E，即对一固定常数 K，存在一个球 $S \supset E \cup \{x\}$ 使得 $m(S) \leqslant Km(E)$.

练习. 设 $f \in L^1$ 并假定 g 是 L^1 中有界和关于 $|x|$ 的下降函数，令 $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} g(x/\varepsilon)$. 试证

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int f(x-y) g_\varepsilon(y) dy = f(x) \int g dy$$

对几乎所有的 x 成立. 并证明左端函数是连续的（提示：首先考虑 g 具有紧致支集的情形和利用定理 2.10.2.）

对于 L^p 中函数，现在我们来改进定理 2.10.2 和定理 2.10.1.

定理 2.10.3. 若 $f \in L^p$，$1 < p < \infty$，则

$$\|\tilde{f}\|_p \leqslant C_p \|f\|_p \tag{2.10.5}$$

其中 $C_p^p = 4^d 2^p p/(p-1)$.

自然地，上述常数不是最佳的. 但是，通过把 f 取作为任意非负函数，我们可以看出，当 $p \to 1$ 时 C_p 的阶是不可能再改进的. 特别地，对于 $p = 1$ 就不存在形如 (2.10.5) 的不等式，其时仅仅有弱估计(2.10.4).

定理 2.10.3 的证明：设 $E_s = \{x; \tilde{f}(x) > s\}$ 和 $\phi(s) = m(E_s)$. 因 $\tilde{f} \in I^+$，集合 $\{(x,s); 0 \leqslant s < |\tilde{f}(x)|^p\}$ 是可测的，将傅比尼定理用于此集合的特征函数，可以得到

$$\int |\tilde{f}|^p dx = \int_0^\infty \phi(s^{1/p}) ds = \int_0^\infty \phi(s) d(s^p).$$

为估计 $\phi(s)$，我们令 $f = g_s + h_s$，其中

$$g_s = \begin{cases} f & \text{当 } |f| \leqslant s/2; \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

则有 $\tilde{g}_s \leqslant s/2$，并因 $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}_s + \tilde{h}_s$，故 $\tilde{h}_s > s/2$ 于 E_s. 从而，由定理 2.10.2，

$$\phi(s) \leqslant m\{x; \tilde{h}_s(x) > s/2\} \leqslant 4^d \left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \int |h_s| dx.$$

由此得到

$$\int |f|^p dx \leqslant p \int_0^\infty s^{p-1} \left(2s^{-1}4^d \int |h_s| dx\right) ds$$
$$= 2^{1-p}(p-1) C_p^p \int \left(\int_0^\infty s^{p-2} |h_s(x)| ds\right) dx$$
$$= C_p^p \|f\|_p^p,$$

这里用到

$$2^{1-p}(p-1) \int_0^\infty s^{p-2} |h_s(x)| ds$$
$$= 2^{1-p}(p-1) \int_0^{2|f(x)|} s^{p-2} |f(x)| ds = |f(x)|^p.$$

若 $|f| \in I^+$，作一函数 $G = s^{p-2}|f(x)|$ 当 $|f(x)| > s/2$，否则 $G = 0$，则它作为 (x,s) 的函数也属于 I^+，故根据定理 2.8.1，积分次序的交换是允许的．由于可以找到 $F \in I^+$ 使 $F \geqslant |f|$ 和

$$\int |F|^p dx \leqslant \int |f|^p dx + \varepsilon,$$

所以不等式一般地成立．

定理 2.10.4. 设 $f \in L^p_{\text{loc}}$，$1 < p < \infty$，则几乎对所有的 x，

$$f(x) = \lim (m(I)^{-1}) \int_I f dy, \qquad (2.10.6)$$

这里 I 记包含 x 且直径趋于零的区间．

注意，定理中不含区间边界长度之间比例的任何条件．定理当 $p = 1$ 和 $d > 1$ 时不成立．

证：借助关于所有含 x 的区间 I 的上确界，我们令

$$f^*(x) = \sup \,(m(I))^{-1} \int_I |f| dy.$$

若 $K_p^p = 2^{p+2}p/(p-1)$，则

$$\|f^*\|_p \leqslant K_p^d \|f\|_p, \quad f \in L^p. \qquad (2.10.7)$$

当 $d = 1$ 时此与 (2.10.5) 一致．鉴于 f^* 可以通过逐次按 $x_1, \cdots,$

x_d 依次地施行运算～得到，所以一般地(2.10.7)也成立(作为练习仔细证明一下)．由(2.10.7)有

$$m\{x; f^*(x) > s\} \leqslant K_p^{dp}(\|f\|_p/s)^p. \qquad (2.10.8)$$

现在，可以重复定理 2.10.1 的证明，唯一不同的是，用(2.10.8)代替(2.10.4)．我们把它留作练习．

实际上，只要假定 $|f|(\max(0, \log|f|))^{n-1}$ 为可积和 f 可测，则(2.10.6)成立．(见齐格蒙 (Zygmund)，三角级数 (Trigonometrical Series) II，第七章，第二节)．

练习．设 F 是原点的一族闭的、有界的凸的对称邻域，满足 $\bigcap_{S\subset F} S = \{0\}$ 以及对任意 S 和 $S' \in F$ 有 $S \subset S'$ 或 $S' \subset S$．试证：若 $f \in L^1$，则下式几乎处处成立

$$m(S)^{-1}\int_S |f(x+y) - f(x)|dy \to 0,$$

$$\text{当 } S \in F \text{ 和 } m(S) \to 0.$$

(提示：首先扩张族 F 使 $F \ni S_n \uparrow S$ 时恒有 $\bar{S} \in F$．注意，若 $S, S' \in F$, $S' \subset S$ 以及 $(x+S) \cap (x'+S') \neq \varnothing$，则 $x' + S' \subset x + 3S$．然后，将定理 2.10.2 推广到最大函数

$$\tilde{f}(x) = \sup_{S \in F} m(S)^{-1}\int_S |f(x+y)|dy.\ )$$

现在，我们利用定理 2.10.1 和定理 2.10.2 来证明：$\mathscr{R}$ 上的任意一个增函数 f 是几乎处处可微的．证明的思路若沿用第三章的一般方法虽然更为自然，但是一个简短的直接证明也是有意义的．

让我们引进 f 的下微商

$$f'_u(x) = \varliminf_{m(I)\to 0} f(I)/m(I),$$

其中 $I = [x_1, x_2]$ 是包含 x 的区间且 $f(I) = f(x_2) - f(x_1)$．我们用 $f'_a(x)$ 记相应于 $\overline{\lim}$ 所定义的上微商．容易看出，$f'_u \in L^1_{loc}$ 而且

$$g(x) = f(x) - \int_0^x f'_u(t)dt$$

为一增函数.（若 $x<0$，积分自然地定义为从 x 到 0 的积分乘以 -1.）为此，作积分

$$2\varepsilon^{-1}\int_{x+\varepsilon}^{y-\varepsilon}(f(t+\varepsilon)-f(t-\varepsilon))dt=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{y-2\varepsilon}^{y}f(t)dt$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x}^{x+2\varepsilon}f(t)dt,$$

并令 ε 按序列趋于零，根据法图引理有

$$\int_x^y f'_u(t)dt\leqslant f(y-0)-f(x+0)\leqslant f(y)-f(x),$$

（这里自然假定 $x<y$），这表明 g 是增函数.

根据定理 2.10.1，f'_u 的积分的微商几乎处处与 f'_u 相等，所以 $g'_u=0$ 几乎处处成立. 我们将证明 g 的微商几乎处处是零. 为此目的只需证明：对任意 $\varepsilon>0$，

$$E=\{x;g'_u(x)=0\ \text{和}\ g'_a(x)>\varepsilon\}$$

是一个零集合. 若 $\delta>0$ 和 $x\in E$，我们可以找到一个包含 x 的区间 $I=[x_1,x_2]$ 使得

$$g(I)<\delta m(I).$$

令 $G(x)=g(x_1)$ 当 $x<x_1$，$G(x)=g(x_2)$ 当 $x>x_2$ 和 $G=g$ 于 I 内. 若令

$$H(x)=\sup_{x\in J}G(J)/m(J),$$

其中 J 是一个区间. 把定理 2.10.2 的证明稍微修改一下，即可证明：对任一增函数 G，

$$m\{x;H(x)>\varepsilon\}\leqslant 4(G(+\infty)-G(-\infty))/\varepsilon,$$

因此，有

$$m(I\cap E)\leqslant m\{x\in I;g'_a(x)>\varepsilon\}$$

$$\leqslant m\{x;H(x)>\varepsilon\}\leqslant 4g(I)/\varepsilon\leqslant 4\delta m(I)/\varepsilon.$$

由于 $\delta>0$ 是任意的，我们得到：若 χ 为 E 的特征函数，则 $\int_0^x\chi(t)dt$ 在 E 内任意一点，只要微商存在其微商必定等于零. 所以 E 的特征函数在 E 内几乎处处等于零，这表明 E 为一零集. 这样，我们就证明了

定理 2.10.5. 若 f 是 R 上的一个增函数，则 f' 几乎处处存在，同时是一个局部可积的函数，并且有 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt+g(x)$，其中 g 为一增函数和 $g'(x)$ 几乎处处等于零.

显然地，$g(x)$ 不必是常数，例如 g 可以是一个阶梯函数. 但是，确实存在一个连续的增函数 g，其微商几乎处处等于零. 下面是一个古典的例子.

例子. 我们在 $[0,1]$ 上构造一个连续的增函数，使得在康托集合 C 以外的地方 $g'(x)=0$. （见定理 1.1.1 前面的例子）设 $O_n=[0,1]\setminus E_n$，则 O_n 由 2^n-1 个开区间所组成，这些开区间是在构造康托集合时为得到 E_n 从 $[0,1]$ 删掉的那些. 在 O_n 上我们这样定义 g_n：若 x 属于 O_n 中从左边数的第 k 个区间，则令 $g_n(x)=k/2^n$. 由于 $O_n\subset O_{n+1}$ 和 g_{n+1} 是 g_n 在 O_n 上的限制（画图！），故可在 $O=[0,1]\setminus C=\cup O_n$ 上定义函数 g，即令

$$g(x)=g_n(x),\ 若\ x\in O_n,$$

此时有

$$|g(x)-g(y)|\leqslant 2^{-n},\ 当\ |x-y|\leqslant 3^{-n}.$$

所以，g 为一致连续并能按唯一的方式连续地开拓到 $\bar{O}=[0,1]$ 上. 很明显 g 是不减的且 $g'(x)=0$ 当 $x\in O$，因为 $x\in O_n$ 对所有充分大的 n，从而在 x 的一个邻域内 $g=g_n$ 为常数.

第三章　拉东-斯蒂尔杰斯积分

§ 1. 正测度的定义

在第二章 § 2 已经指出，从黎曼积分到勒贝格积分的推广仅仅依赖连续函数的黎曼积分的一小部分性质．一般地，设 $f \to \mu(f)$ 是从 C_0 到实数的一个映射，并且满足

$$\mu(af + bg) = a\mu(f) + b\mu(g) \quad \text{对 } a, b \in R \text{ 和 } f, g \in C_0, \tag{3.1.1}$$

和

$$\mu(f) \geqslant 0 \quad \text{对 } f \in C_0^+. \tag{3.1.2}$$

于是就还有

$$\mu(f_n) \to 0, \quad \text{若 } C_0^+ \ni f_n \downarrow 0. \tag{3.1.3}$$

事实上，设 M_n 为 f_n 的最大值，引理 1.2.2 表明 $M_n \to 0$ 当 $n \to \infty$．若令 f 为 C_0^+ 中函数，在 $f_1 \neq 0$ 处其值为 1．由于 $f_n \leqslant M_n f$，从而 $0 \leqslant \mu(f_n) \leqslant M_n \mu(f) \to 0$ 当 $n \to \infty$．

当 $f \in I^+$，与前面类似我们可以定义

$$\mu^*(f) = \sup_{f \geqslant g \in C_0} \mu(g),$$

并可证明类似于前面的关于上积分的断言．对于一般函数 $f \geqslant 0$，我们令

$$\mu^*(f) = \sup_{f \geqslant g \in I^+} \mu^*(g).$$

与以前类似，现在可以这样定义关于 μ 可积的函数类 L_μ^1：若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_0$ 使 $\mu^*(|f - g|) < \varepsilon$，则说 $f \in L_\mu^1$．当 $f \in L_\mu^1$ 时，可定义积分 $\mu(f)$，并且关于勒贝格积分的那些定理完全成立．注意，μ-零集合在很大的程度上取决于 μ 的选择，这就要求我们对于所有涉及到零集合的定理的叙述要特别的慎重．

一个具有前面所述性质的泛函 $\mu(f)$ 被称为拉东（Radon）正测度．特别地，若 C_0 代表的是 $C_0(\Omega)$，其中 Ω 是 $\mathscr{R}^d$ 的一个开集，

那么我们得到Ω上的拉东测度,以后,为了避免繁杂的记号,我们将主要地考虑$\mathscr{R}^d$上的拉东测度,并且让读者自己去验证所有的定理无更改地对Ω上的拉东测度也成立.

§2. 一维情形. 斯蒂尔杰斯积分

设$\Omega=(\alpha,\beta)$是一个有限或无限的开区间. 我们将确定Ω上所有的正测度μ. 令

$$H_x(y)=1 \text{ 当 } y>x \text{ 而 } H_x(y)=0 \text{ 当 } y\leqslant x.$$

则有$H_x\in I^+$, 并且,对$x_i\in\Omega$, 差$H_{x_1}-H_{x_2}$为μ-可测. 它的上积分显然是有限的,从而它属于L^1_μ. 存在一个,并且除相差一个常数外只有一个函数ϕ,使得

$$\phi(x_2)-\phi(x_1)=\mu(H_{x_1}-H_{x_2});\quad x_1,x_2\in\Omega. \tag{3.2.1}$$

事实上,取一固定$x_0\in\Omega$, 若$\phi(x_0)=c$, 则必有

$$\phi(x)=\mu(H_{x_0}-H_x)+C. \tag{3.2.2}$$

根据积分的可加性,反过来也对,即对于任一常数值,函数(3.2.2)满足(3.2.1).

μ为正这一事实((3.1.2)自然扩展及于L^1_μ中非负函数)表明ϕ必定是一个增函数. 因$H_{x+h}(x)\uparrow H_x(x)$当$h\downarrow 0$,所以$\phi$还是右连续的.

现在,我们来说明,反过来测度μ也能够通过函数ϕ重新构造出来.设f是$C_0(\Omega)$中的一个函数,作Ω的一个剖分,令分点为x_k,并令M_k和m_k分别地是f在(x_k,x_{k+1})上的最大与最小值. 由于

$$\Sigma m_k(H_{x_k}-H_{x_{k+1}})\leqslant f\leqslant \Sigma M_k(H_k-H_{k+1}),$$

μ的单调性和定义(3.2.1)表明

$$\Sigma m_k(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k))\leqslant\mu(f)\leqslant\Sigma M_k(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)). \tag{3.2.3}$$

现在,对任意给定的Ω上的一个增函数ϕ,类似于第一章§1我们可以引进黎曼-斯蒂尔杰斯(Stieltjes)上积分与下积分:

$$\overline{\int} fd\phi = \inf\Sigma M_k(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)),$$

$$\underline{\int} fd\phi = \sup\Sigma m_k(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)).$$

并按同样的方法也可以看出：当 $f \in C_0(\Omega)$，有

$$\overline{\int} fd\phi = \underline{\int} fd\phi,$$

同时，若以 $\int fd\phi$ 记这个共同值，则 $f \to \int fd\phi$ 是一个正测度．特别地，若 ϕ 是根据(3.2.1)从给定测度 μ 出发得到的，则由(3.2.3)可知

$$\mu(f) = \int fd\phi.$$

剩下我们要分析的就是什么时候两个不等的增函数 ϕ 和 ψ 确定同一测度，也就是说，何时

$$\int fd\phi = \int fd\psi, \ 对一切 f \in C_0(\Omega).$$

令 $x_1 < x_2 (x_i \in \Omega)$ 并取一函数序列 $f_n \in C_0(\Omega)$，其中 f_n 于区间 $\left(x_1 - \frac{1}{n},\ x_2 + \frac{1}{n}\right)$ 内等于 1，在区间 $\left(x_1 - \frac{2}{n},\ x_2 + \frac{2}{n}\right)$ 外其值为零，而在其余地方其值在 0 和 1 中间．那么，有

$$\phi\left(x_2 + \frac{1}{n}\right) - \phi\left(x_1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant \int f_n d\phi$$

$$\leqslant \phi\left(x_2 + \frac{2}{n}\right) - \phi\left(x_1 - \frac{2}{n}\right).$$

令 $n \to \infty$，由于不等式外侧的两项趋于同一极限值，故有

$$\phi(x_2 + 0) - \phi(x_1 - 0) = \lim_{n\to\infty}\int f_n d\phi$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int f_n d\psi = \psi(x_2 + 0) - \psi(x_1 - 0),$$

即

$$\phi(x_2 + 0) - \psi(x_1 - 0) = \psi(x_2 + 0) - \phi(x_1 - 0) = C,$$

其中 C 是一个常数．从而，对任意 $x \in \Omega$，有

$$\phi(x + 0) - \psi(x + 0) = \phi(x - 0) - \psi(x - 0) = C.$$

可见，ϕ 和 ψ 在所有连续点只相差一个共同常数．若 ϕ 和 ψ 两者都是右连续的，则 $\phi - \psi = C$ 处处成立．因此，我们证明了

定理 3.2.1 [F. 黎斯]．(α, β) 上的任意正测度 μ 是关于某个增函数 ϕ 的斯蒂尔杰斯积分．如果要求 ϕ 是右连续并指定它在某一点的值，则此函数是由 μ 所唯一确定的．

练习． 证明一个增函数至多有可数多个不连续点．（提示：证明若 $\varepsilon > 0$ 则在每个紧致子区间上仅仅存在有限多个点，函数在这些点上的跃度 $> \varepsilon$．）

所以，若只在可数多个点上改变一个增函数的定义，则相应的斯蒂尔杰斯积分保持不变．

因为一般的拉东测度是斯蒂尔杰斯积分的推广，所以，即便在多变数的情形，人们也常常把 $\mu(f)$ 写成 $\int f d\mu$．

§3. 一般的拉东测度及其正部与负部的分解

若 μ 为一正测度，则当 $f_n \in C_0$ 在某一固定的紧致集 K 外等于零，并且一致地趋于零时，$\mu(f_n)$ 趋于零．事实上，我们可以找到一个函数 $f \in C_0^+$，使在 K 上 $f = 1$．令 $M_n = \sup |f_n|$，则

$$-M_n f \leqslant f_n \leqslant M_n f,$$

同时，$-M_n \mu(f) \leqslant \mu(f_n) \leqslant M_n \mu(f)$．又因当 $n \to \infty$ 时 $M_n \to 0$，所以 $\mu(f_n) \to 0$．基于这个原因，我们可以按下面的方法推广测度的概念．

定义 3.3.1. 一个定义在 C_0 上的实值泛函 $\mu(f)$，若满足条件

$$\mu(af + bg) = a\mu(f) + b\mu(g) \quad \text{对 } a, b \in R \text{ 和 } f, g \in C_0,$$

且进一步还满足：$\mu(f_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$，其中序列 $f_n \in C_0$ 在某一固定的紧致集合外等于零，并且一致地趋于零．此时，我们称 $\mu(f)$ 是一个拉东测度．

一般拉东测度的引进，使得确定测度的任意线性组合成为可

能：若μ和ν为拉东测度而 $a, b \in R$，那么我们定义测度 $a\mu + b\nu$ 为

$$(a\mu + b\nu)(f) = a\mu(f) + b\nu(f), \quad f \in C_0.$$

定义 3.3.2. 设μ和ν为拉东测度，若$\nu - \mu$为一正的拉东测度，即

$$\mu(f) \leqslant \nu(f), \quad f \in C_0^+,$$

则记 $\mu \leqslant \nu$.

定理 3.3.3. 任一拉东测度 μ 可以写成 $\mu = \mu^+ - \mu^-$，其中 μ^+ 和 μ^- 为正测度，并且此分解在下述意义下是最小的，即对任意分解 $\mu = \mu_1 - \mu_2$，$\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$，均有 $\mu_1 \geqslant \mu^+$ 和 $\mu_2 \geqslant \mu^-$. 而且，这样的 μ^+ 和 μ^- 是唯一确定的.

证：首先请注意，当我们要构造一个正的拉东测度 ν，只要就 $f \geqslant 0$ 情形确定 $\nu(f)$，使得(3.1.1)和(3.1.2)(以 ν 代替 μ)对非负函数和纯量成立. 这是因为每一个 C_0 中函数都可以写成两个 C_0^+ 中函数之差，所以我们还可以将 $\nu(f)$ 的定义唯一地开拓到一般的 f 上，使(3.1.1)和(3.1.2)成立.

现在，假定我们有一个分解 $\mu = \mu_1 - \mu_2$，其中 $\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$. 若 $0 \leqslant g \leqslant f$ 和 $f, g \in C_0$，则得 $\mu(g) \leqslant \mu_1(g) \leqslant \mu_1(f)$. 这也就是说，

$$\mu_1(f) \geqslant \sup_{0 \leqslant g \leqslant f} \mu(g) = \mu^+(f).$$

现在来证明上式所定义的泛函 $\mu^+(f)$ 确实满足(3.1.1)和(3.1.2). 这里，$\mu^+(f) \geqslant 0$ 和 $\mu^+(f_1 + f_2) \geqslant \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2)$当 $f, f_1, f_2 \in C_0^+$ 是显然成立的. 为证反方向的不等式，我们任取一函数 $g \in C_0$ 满足 $g \leqslant f_1 + f_2$. 设 $g_1 = \min(g, f_1)$ 和 $g_2 = g - g_1$. 显然 $g_1, g_2 \in C_0^+$ 而 $g_1 \leqslant f_1$. 进一步，我们有

$$\begin{aligned} g_2 &= g - \min(g, f_1) = g + \max(-g, -f_1) \\ &= \max(0, g - f_1) \leqslant f_2. \end{aligned}$$

这也就是说，对任意满足 $g \leqslant f_1 + f_2$ 的 $g \in C_0^+$，可得

$$\mu(g) = \mu(g_1) + \mu(g_2) \leqslant \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

由此可知

$$\mu^+(f_1 + f_2) \leqslant \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2),$$

可见 μ^+ 是可加的．由于 μ^+ 的齐次性是明显的，从而 μ^+ 是一个正测度．现在，我们令

$$\mu^-(f) = \mu^+(f) - \mu(f) = \sup_{0 \leqslant g \leqslant f} \mu(g - f)$$
$$= \sup_{0 \leqslant h \leqslant f} (-\mu(h)),\ f \in C_0^+,$$

则 $\mu^- = (-\mu)^+$，故 μ^- 也是一个正测度．同时，我们有 $\mu = \mu^+ - \mu^-$．根据证明的第一部分，这个分解是最小的．

我们称 μ^+ 和 μ^- 分别为测度 μ 的正部和负部，而 μ 的绝对值则定义为测度

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

练习． 设 $f \in C_0^+$，试证等式

$$|\mu|(f) = \sup_{|g| \leqslant f} \mu(g) \qquad (g \in C_0)$$

和三角不等式

$$|\mu + \nu| \leqslant |\mu| + |\nu|$$

成立．

μ^+ 和 μ^- 的形成是与前面经常作 $f^+ = \max(f, 0)$ 和 $f^- = \min(-f, 0)$ 完全类似的．类似于两个函数的最大与最小的公式，我们现在引进

定义 3.3.4. 设 μ 和 ν 为两个测度，令

$$\max(\mu, \nu) = (\mu + \nu + |\mu - \nu|)/2,$$
$$\min(\mu, \nu) = (\mu + \nu - |\mu - \nu|)/2.$$

为解释上述定义的依据，首先注意

$$\max(\mu, \nu) \geqslant \mu \text{ 和 } \max(\mu, \nu) \geqslant \nu,$$

这可由下列表示式推知

$$\max(\mu, \nu) - \mu = (|\mu - \nu| + \nu - \mu)/2 = (\nu - \mu)^+.$$

另一方面，由 $\sigma \geqslant \mu$ 和 $\sigma \geqslant \nu$ 可知不等式 $\sigma \geqslant \max(\mu, \nu)$ 成立．事实上，若记 $\mu = \sigma - \mu'$ 和 $\nu = \sigma - \nu'$，则 μ' 和 $\nu' \geqslant 0$．又因 $|\mu' - \nu'| \leqslant \mu' + \nu'$，我们得到 $\sigma - \max(\mu, \nu) = (\mu' + \nu' - |\mu' - \nu'|)/2 \geqslant 0$．这样，我们证得

定理 3.3.5. $\max(\mu, \nu)$ 是所有 $\geqslant \mu$ 和 ν 的测度中最小的那个，而 $\min(\mu,\nu)$ 是所有 $\leqslant \mu$ 和 ν 的测度中最大的那个.

特别地，有 $\mu^+ = \max(\mu,0)$ 和 $\mu^- = \max(-\mu,0)$.

定理 3.3.6. 对任一测度 μ，可以找到互为余集的 E^+ 和 E^- (即 $(E^+)^C = E^-$)，使得 E^+ 对 μ^- 是一零集而同时 E^- 对 μ^+ 也为零集. 同时，还可以如此选择 E^+ 和 E^-，使它们关于任一正测度是可测的.

证：取一连续函数 f，使 $\int f d\mu^+ < \infty$ 并且几乎处处 $f>0$. 因为 $f \in I^+$，故有 $\int f d\mu^+ = \sup \int g d\mu$，其中上确界是在集合 $\{g \in C_0^+; g \leqslant f\}$ 上取的. 选一序列 $\{g_n\} \subset C_0^+$，其中 $g_n \leqslant f$ 并使

$$\mu(g_n) \geqslant \mu^+(f) - 2^{-n}.$$

上式也可以写成

$$(\mu^+(f) - \mu^+(g_n)) + \mu^-(g_n) \leqslant 2^{-n}.$$

由此看出，上式左端的每一项是非负的并以 2^{-n} 为上界. 令 $g = \overline{\lim} g_n$. 因为 $g_n \in C_0$，所以 g 关于任一正测度是可测的，并有 $0 \leqslant g \leqslant f$. 其次，对任意 N，$g \leqslant g_N + g_{N+1} + \cdots$，由此可知 $\mu^-(g) \leqslant 2^{1-N}$，故 g 关于 μ^- 是一个零函数. 又因 $\mu^+(f - g_n) \leqslant 2^{-n}$ 和 $\underline{\lim}(f - g_n) = f - g$，根据法图引理，进而得到 $\mu^+(f - g) = 0$. 现在，令 $E^+ = \{x; g(x) > 0\}$，$E^- = (E^+)^C = \{x, g(x) = 0\}$. 因 $\mu^-(g) = 0$，故 E^+ 对 μ^- 为一零集. 最后，注意在 E^- 上 $f - g = f > 0$，而 $f - g$ 关于 μ^+ 是一零集，所以 E^- 对 μ^+ 为零集. 至此定理证毕.

定理 3.3.7. 设 μ 和 ν 是两个拉东测度，则下列条件是等价的:

(1) $\min(|\mu|, |\nu|) = 0$;

(2) 存在两个互余的集合 E^μ 和 E^ν，它们分别地关于 $|\nu|$ 和 $|\mu|$ 为零集.

证：自然地，假定 μ 和 ν 为正测度也就够了. 首先假定

$\min(\mu,\nu)=0$，这也就是说，$|\mu-\nu|=\mu+\nu$. 令 $\rho=\mu-\nu$，此时 $\rho^+=\mu$ 而 $\rho^-=\nu$，根据定理 3.3.6 即知(2)成立. 现在，假设条件(2)成立. 令 $\sigma=\min(\mu,\nu)$. 因 $\sigma\leqslant\mu$ 和 E^ν 对 μ 为零集，故 E^ν 对 σ 也是一个零集，由于 $\sigma\leqslant\nu$，所以 E^μ 对 σ 为零集. 这样一来，整个空间对 σ 为零集，所以 σ 为零测度.

定义 3.3.8. 假如定理 3.3.7 中的等价条件之一成立，则说 μ 和 ν 互为奇异的.（在古典术语中，称其中之一关于另一个是奇异的，但这个术语没有表示出这种关系是对称的.）

§4. 一 维 情 形

为用斯蒂尔杰斯积分去描述一般的拉东测度，如象 §2 中描述拉东正测度那样，我们需要一个新的概念.

定义 3.4.1. 一个定义在区间 (α,β) 上的函数 ϕ，若对于每个紧致子区间 $[a,b]$ 存在一个常数 V，使得

$$\sum_{1}^{n-1}|\phi(x_k)-\phi(x_{k+1})|\leqslant V,$$

其中 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的任一剖分，则说 ϕ 是一个局部有界变差函数，并称使上述不等式成立的最小常数叫做 ϕ 在 $[a,b]$ 上的全变差.

定理 3.4.2. 任一有界变差函数 ϕ 可以写成 $\phi=\phi^+-\phi^-$，其中 ϕ^+ 和 ϕ^- 为增函数. 反之，每个这样的差也是一个有界变差函数. 若 ϕ 为右连续，则函数 ϕ^+ 和 ϕ^- 可以选成为右连续的.

证：只要在一个区间 $[a,b]$ 上讨论就够了. 若 r 是一个实数，象通常那样令 $r^+=\max(r,0)$ 和 $r^-=\max(-r,0)$. 假定 $\phi(a)=0$ 并对 $x\in[a,b]$ 令

$$\phi^+(x)=\sup\sum_{1}^{n-1}(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k))^+$$

$$\phi^-(x)=\sup\sum_{1}^{n-1}(\phi(x_{k+1})-\phi(x_k))^-$$

$$\Phi(x) = \sup \sum_{1}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)|,$$

其中上确界是对所有有限点列 $a = x_1 < \cdots < x_n = x$ 取的. 根据定义 3.4.1 中的假定条件,上面三个上确界均为有限并且显然是关于 x 的增函数. 同样明显的是: 若 ϕ 是 a 处为零的两个增函数之差,则这两个增函数必定分别地 $\geqslant \phi^+$ 和 ϕ^-. 那么, 现在的问题就是要证明 $\phi = \phi^+ - \phi^-$, 同时还将证明 $\Phi = \phi^+ + \phi^-$.

对于任意数 r, 因 $r = r^+ - r^-$ 和 $|r| = r^+ + r^-$ 成立,故有

$$\phi(x) - \phi(a) + \sum_{1}^{n-1} (\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k))^-$$

$$= \sum_{1}^{n-1} (\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k))^+.$$

我们以 $\phi^+(x)$ 作为右端的估计, 然后再取左端的上确界, 由此得 $\phi(x) - \phi(a) + \phi^-(x) \leqslant \phi^+(x)$. 另一方面, 如果从用 $\phi(x) - \phi(a) + \phi^-(x)$ 出发估计左端,我们又可得到反方向的不等式. 由于 $\phi(a) = 0$, 故有 $\phi(x) = \phi^+(x) - \phi^-(x)$. 关于 $\Phi = \phi^+ + \phi^-$ 的证明可以类似地进行, 只需注意到定义中诸量不随剖分的加密而减小.

由于已经知道分解 $\phi = \phi^+ - \phi^-$ 是最小的,所以不可能出现 ϕ^+ 和 ϕ^- 两个都在某个点有一右的正跃度. 因为,如若不然,由简单地从两者同时去掉那个最小的跃度, 人们势必得到一个由更小的 ϕ^+ 和 ϕ^- 作成的分解. 若 ϕ 为右连续,那么, ϕ^+ 和 ϕ^- 处处有同样的右间断,因此它们为右连续.

设 ϕ 为一有界变差函数. 那么,如同 ϕ 为增函数时那样,一个函数 $f \in C_0$ 关于 ϕ 的斯蒂尔杰斯积分就定义为

$$\int f d\phi = \lim \Sigma f(\xi_k)(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)),$$

其中 ξ_k 是 (x_k, x_{k+1}) 中的任意一个点,并且剖分的细密度趋于零. 上述极限之所以存在,是由于 f 可以表示成两个增函数之差,而对于增函数先前已经证明上述极限是存在的(同时,一个直接的证明

也不难得到，只要注意到黎曼-斯蒂尔杰斯和的绝对值不超过 ϕ 的全变差乘以 $|f|$ 的最大值)．现在，根据定理 3.4.2，每个一般的斯蒂尔杰斯积分是二个关于增函数的斯蒂尔杰斯积分之差，并且，反之亦然．从而，一维的一般拉东测度可以等同于关于一有界变差函数的斯蒂尔杰斯积分．

练习． 设有界变差函数 ϕ 定义测度 μ，则定理 3.4.2 证明中引进的函数 ϕ^+, ϕ^- 和 Φ 定义测度 μ^+, μ^- 和 $|\mu|$.

§5. 以 μ 为基的测度

若 μ 为一正测度，类似于第二章 §5，我们可以定义：一个函数 g，若它在每一紧致集合上是 μ 可积的，或等价地若 $fg \in L^1_\mu$ 对任意 $f \in C_0$，则称 g 为 μ 局部可积的．

定义 3.5.1. 若 μ 为一正测度而 g 是局部 μ 可积的，则用 $g\mu$ 记测度

$$\nu(f) = \mu(fg) = \int fg\,d\mu,\ f \in C_0,$$

并把它叫做测度 μ 与函数 g 的乘积．任意一个这样的测度被称为以 μ 为基的测度(经典的术语是：关于 μ 绝对连续．与定理 3.6.5 比较)．

为说明定义的合理性，我们注意，若在紧致集 K 之外 $f=0$，则 $|\nu(f)| \leqslant \sup|f| \int_K |g|\,d\mu$，所以测度的连续性得到满足．其次，线性性质是显然的．

定理 3.5.2. 设 $g \geqslant 0$ 为局部 μ-可积．则 $f \in L^1_{g\mu}$ 的充分必要条件是 $fg \in L^1_\mu$ (我们假定 $0\cdot\infty=0$)．并且，我们有

$$(g\mu)(f) = \mu(fg).$$

首先，我们证明一个辅助引理．

引理 3.5.3. 若 $g \geqslant 0$ 是局部 μ-可积，则对任意 $f \geqslant 0$，

$$(g\mu)^*(f) = \mu^*(fg). \tag{3.5.1}$$

证：由 $g\mu$ 的定义，若 $f \in C_0^+$，则 (3.5.1) 成立．若 $f_n \uparrow f$ 和

(3.5.1) 对所有 f_n 成立，那么，由定理 2.2.2，(3.5.1) 对极限函数 f 亦成立(注意，若 $f=\infty$ 和 $g=0$，这里规定 $fg=0$)．由此即知当 $f\in I^+$ 时(3.5.1)成立．因为存在一个序列 $h_n\in C_0^+$，它上升地趋于∞，从而 $Th_nf\uparrow f$，所以只需对能被 C_0^+ 中某个函数控制的 f 证明(3.5.1)就足够了．

若 $f\geqslant 0$ 且 $f\leqslant F\in I^+$，则

$$\mu^*(fg)\leqslant\mu^*(Fg)=(g\mu)^*(F),$$

故有

$$\mu^*(fg)\leqslant(g\mu)^*(f). \tag{3.5.2}$$

为证另一反方向的不等式，我们任取一函数 $H\in I^+$ 满足 $H\geqslant fg$．令 $F=H/g$ 当 $g\neq 0$ 和令 $F=\infty$ 当 $g=0$．则有 $f\leqslant F$ 和 $gF\leqslant H$．此外，F 关于 μ 可测． 如果我们证明了(3.5.1)对 μ-可测函数 f 成立的话，那么将有

$$(g\mu)^*(f)\leqslant(g\mu)^*(F)\leqslant\mu^*(H).$$

由右端对 H 取下确界，即得一个与(3.5.2)方向相反的不等式．

现在剩下的就是证明当 f 可测并且 $f\leqslant h\in C_0$ 时 (3.5.1) 成立．根据定理 2.4.6，我们可以找到一个序列 $f_n\in I^+$，使在一个 μ-零集之外 $f_n\downarrow f$，并且我们自然可以假定 $f_n\leqslant h$，对所有 n． 因为 $L_\mu^1\ni gf_n\leqslant gh\in L_\mu^1$，于是根据勒贝格定理有

$$(g\mu)^*(f)\leqslant(g\mu)^*(f_n)=\mu^*(gf_n)\to\mu(gf).$$

此不等式是与(3.5.2)的方向相反的．从而(3.5.1)得证．

定理 3.5.2 的证明：由 (3.5.1)，特别地有：一个集合 E 关于 $g\mu$ 为零集的充分必要条件是关于测度 μ 在 E 上几乎处处 $g=0$. 因此，根据定理 2.6.6，一个集合 E 关于 $g\mu$ 为可测的充分与必要条件是 $E\cap\{x;g(x)\neq 0\}$ 关于 μ 为可测的．这也就是说，f 关于 $g\mu$ 可测的充分与必要条件是函数：

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x) & \text{当 } g(x)\neq 0;\\ 0 & \text{当 } g(x)=0\end{cases}$$

为 μ-可测，亦即 fg 为 μ-可测．现在，由引理 3.5.3 和定理 2.5.2，就知定理 3.5.2 成立．

以后我们还需要下述简单结果.

定理 3.5.4. 若μ和ν为正测度,则有$L^1_\mu \cap L^1_\nu = L^1_{\mu+\nu}$,并且

$$(\mu+\nu)(f) = \mu(f) + \nu(f), \quad f \in L^1_{\mu+\nu}. \tag{3.5.3}$$

证: 对任意$f \geqslant 0$, 有

$$(\mu+\nu)^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f). \tag{3.5.4}$$

若$f \in C_0^+$, 上式就是$\mu+\nu$的定义,由此知(3.5.4)对$f \in I^+$成立. 至一般函数的推广留作练习. 特别地, 一个集合关于$\mu+\nu$为零集的充分与必要条件是它关于μ和ν两者皆为零集. 借助于定理2.6.6, 由此我们得知: 一个函数为$(\mu+\nu)$-可测的充要条件是它既是μ-可测同时也是ν-可测. 并且,根据(3.5.4)和定理2.5.2, $L^1_{\mu+\nu} = L^1_\mu \cap L^1_\nu$ 成立.同时,(3.5.3)是必定满足的,因为它对$f \in C_0$ 成立.

现在我们来研究§3中所定义的运算在以μ为基的测度上是如何实行的 .

定理 3.5.5. 若g为局部μ-可积,则有$(g\mu)^+ = g^+\mu$,$(g\mu)^- = g^-\mu$和$|g\mu| = |g|\mu$.

证: 令$g^+\mu = \nu_1$和$g^-\mu = \nu_2$并引进$E^+ = \{x; g(x) \geqslant 0\}$, $E^- = \{x; g(x) < 0\}$. 这两个集合互为余集,并且由定理3.5.2可知, E^+关于ν_2是零集而E^-则关于ν_1为零集. 于是, 根据定理3.3.7, 有$\min(\nu_1, \nu_2) = 0$, 亦即$|\nu_1 - \nu_2| = \nu_1 + \nu_2$. 这也就是说, $(\nu_1 - \nu_2)^+ = \nu_1$和$(\nu_1 - \nu_2)^- = \nu_2$. 由于$\nu_1 - \nu_2 = g\mu$, 故定理得证.

定理 3.5.6. 测度$g\mu$是零的充分与必要条件是$|g|$为一个μ-零函数.

证: 充分性是显然的. 现设$g\mu$为零测度. 此时, $|g|\mu = |g\mu| = 0$. 这也就是说, 1关于$|g|\mu$是可积的且其积分值为零. 这样一来, 根据定理3.5.2, $|g|$关于μ也是可积的,同时以零为积分值,由此定理得证.

定理 3.5.7. 若$0 \leqslant g_n \uparrow g$,且所有$g_n$为局部$\mu$-可积和$g_n\mu \leqslant \nu$, 对某一$\nu$和所有$n$, 则$g$为局部$\mu$-可积.

证：设 $0 \leqslant f \in C_0$. 则 fg_n 上升地趋于 fg 并且 $\mu(fg_n) = (g_n\mu)(f) \leqslant \nu(f)$. 这就说明 fg 属于 L^1_μ, 由此定理得证.

§6. 勒贝格分解,勒贝格-拉东-尼科迪姆定理

我们来证明下述勒贝格的定理.

定理 3.6.1. 设 μ 为一正测度. 则任一测度 ν 可按唯一的方式写成

$$\nu = g\mu + \nu',$$

其中 g 为局部 μ-可积而 ν' 是和 μ 互为奇异的的测度. 若 ν 是正的,则 $g\mu$ 和 ν' 也是正的.

证：只要证明 $g\mu + \nu' = 0$ 蕴含 $g\mu$ 和 ν' 是零，那么唯一性为真. 根据定理 3.3.7 我们知道，存在互余的两个集合 E_1 和 E_2, 使 E_1 关于 $|\nu'|$ 为零集而 E_2 关于 μ 为零集. 则 E_2 关于 $|g|\mu = |\nu'|$ 也是零集，从而整个空间是一个 $|\nu'|$-零集. 这也就是说，$\nu' = 0$, 故唯一性得证.

为证存在性只要考虑正测度 ν 就可以了. 我们需要某些辅助引理.

引理 3.6.2. 若 μ 和 ν 为正测度，则在所有以 μ 为基的并且 $\leqslant \nu$ 的测度中可以找出一个最大的.

证：作一个处处为正的连续函数 f, 使 f 为 ν-可积. 令 $G = \sup\limits_g (g\mu)(f)$, 这里 g 为 μ-可积并且 $0 \leqslant g\mu \leqslant \nu$. 我们将证明此上确界可以达到，为此我们取一序列 g_n, 使 $0 \leqslant g_n\mu \leqslant \nu$ 和 $(g_n\mu)(f) \to G$. 因为序列 g_n 可以用序列 $\max(g_1, \cdots, g_n)$ 去替代,所以我们可以假定序列 g_n 是递增的. 根据定理 3.5.7, 极限 $g = \lim g_n$ 是一个局部 μ-可积函数，并且有 $(g\mu)(f) \geqslant (g_n\mu)(f) \to G$, 因而 $(g\mu)(f) = G$ 成立.

现在,令 h 是一个任意的 μ-可积函数,使得 $h\mu \leqslant \nu$, 我们来证明 $h\mu \leqslant g\mu$. 这里，我们可以假定 $g \leqslant h$, 因为如若不然，根据 $(\max(h, g))\mu = \max(h\mu, g\mu) \leqslant \nu$, 我们可以用 $\max(h, g)$ 代替

h.

现在，根据G的定义我们有

$$(h\mu)(f) \leqslant G = (g\mu)(f),$$

亦即 $\mu((h-g)f) = 0$. 因为 $(h-g) \geqslant 0$ 和处处有 $f > 0$，故知 $h-g$ 是一个 μ-零函数，亦即 $h\mu = g\mu$，由此引理得证.

g 的最大性也可以这样陈述：若 $\nu = g\mu + \nu'$ 则 $\nu' \geqslant 0$，并且若一个以 μ 为基的正测度 $\leqslant \nu'$ 则此测度必定是零. 关于定理 3.6.1 的证明，剩下的事就是要证明 ν' 和 μ 是互为奇异的了.

引理 3.6.3. 设 $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$ 并假定 $\nu \neq 0$. 则存在一个以 μ 为基的正测度，它 $\neq 0$ 并且 $\leqslant \nu$.

证： 可以找到一个正数 $t > 0$，使 $\nu - t\mu \leqslant 0$ 不成立，因若不然，则 $\nu \leqslant t\mu$ 对任意 $t > 0$ 成立，这将表明 $\nu \leqslant 0$，也就是说 $\nu = 0$. 对于上述 t，根据定理 3.3.6，可以作出两个测度 $(\nu - t\mu)^+$ 和 $(\nu - t\mu)^-$ 以及由互余集合 E^+ 和 E^- 组成的空间的一个剖分. 这就意味着在某种意义下 $\nu > t\mu$ 于 E^+ 上，因而促使我们引入 E^+ 的特征函数 χ 并往证

$$a)\ t\chi\mu \leqslant \nu; \qquad b)\ t\chi\mu \neq 0,$$

这样就完成了引理的证明. 按我们现有的记号，定理 3.3.6 表明

$$\chi(\nu - t\mu)^- = 0, \ (1-\chi)(\nu - t\mu)^+ = 0. \tag{3.6.1}$$

将等式

$$(\nu - t\mu)^+ - (\nu - t\mu)^- = \nu - t\mu$$

两端乘以 χ，由(3.6.1)于是就得到

$$0 \leqslant \chi(\nu - t\mu)^+ = \chi\nu - t\chi\mu \leqslant \nu - t\chi\mu,$$

所以断言 a) 为真. 为证 b)，我们只要注意：根据假定 $\mu \geqslant \nu$，所以(3.6.1)表明

$$\chi\mu \geqslant \chi\nu \geqslant \chi(\nu - t\mu)^+ = (\nu - t\mu)^+ \neq 0.$$

引理 3.6.4. 设 μ 和 ν 为正测度. 若 $\min(\mu, \nu) \neq 0$，亦即若 μ 和 ν 不是互为奇异的，则存在一个以 μ 为基的正测度，它 $\neq 0$ 并且 $\leqslant \nu$.

证：令 $\nu_1 = \min(\mu, \nu)$，则 $0 \neq \nu_1 \leqslant \mu$. 从而，我们可以代

ν 以 ν_1 去应用前面的引理. 由于每个 $\leqslant \nu_1$ 的测度同时也 $\leqslant \nu$, 故引理成立.

定理 3.6.1 证明的结尾: 在引理 3.6.2 之后, 我们已经确立: 一个正测度 ν 可以写成 $\nu = g\mu + \nu'$, 其中 $\nu' \geqslant 0$, 并且不存在以 μ 为基的非零正测度被 ν' 所控制. 因而, 根据引理 3.6.4, 可知 $\min(\nu', \mu) = 0$, 亦即 μ 和 ν' 是互为奇异的. 至此定理证毕.

定理 3.6.5 [勒贝格-拉东-尼科迪姆]. 设 μ 和 ν 是两个正测度,则下列条件是等价的:

a) ν 是一个以 μ 为基的测度,

b) 每个 μ-零集也是一个 ν-零集.

证: 由定理 3.5.2 知, *a*) 蕴含 *b*). 为证 *b*) 蕴含 *a*), 我们取 ν 的勒贝格分解

$$\nu = g\mu + \nu',$$

其中 ν' 是和 μ 互为奇异的. 因 $\nu' \leqslant \nu$, 故每个 ν-零集也是一个 ν'-零集. 现在, μ 和 ν' 是互为奇异的假定表明, 存在一个由两个互余集组成的空间的剖分, 其中之一是 ν'-零集而另一个是 μ-零集. 然而, 由 *b*) 知每个 μ-零集是一个 ν-零集, 从而也是 ν'-零集. 由此可知, 整个空间为 ν'-零集, 这表明 $\nu' = 0$.

推论 3.6.6. 若 $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$, 则 ν 是一个以 μ 为基的测度, 并有 $\nu = g\mu$, 其中 $0 \leqslant g \leqslant 1$.

证: 由定理 3.6.5, 第一个论断为真. 又若 $\nu = g\mu$, 则我们有 $(1-g)\mu \geqslant 0$, 故 $(1-g)^-$ 是一个零函数, 也就是说 $g \leqslant 1$ 几乎处处成立.

注意, 推论 3.6.6 改进了引理 3.6.3.

练习 1. 设 μ 和 ν 是两个任意的正测度, 试证可以找到一个正测度 λ, 使 μ 和 ν 均以 λ 为基. 推广结果到可数多个给定正测度情形.

练习 2. 利用练习 1 去说明: 对任意正测度 μ 和 ν, 人们可以定义测度 $(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}$ 和 $(\mu^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}}$. 等等. (它们可以用来定义一个可求长曲线的弧长, 即曲线 $R \ni t \to x(t) \in R^d$, 其中所有坐标

$x_i(t)$ 为有界变差函数．令 $d\sigma = (\sum(dx_i)^2)^{\frac{1}{2}}$，那么 $\int \phi(t)\, d\sigma(t)$ 是函数 ϕ 在曲线上关于弧长的积分．）

在通常的勒贝格分解中，人们将定理 3.6.1 中的测度 ν' 进一步地分解成一个“不连续的”和一个“连续的”部分．在布巴基的术语中，这变成下面的

定义 3.6.7. 一个测度 ν，若每个点（从而每个可数集）关于 $|\nu|$ 是一个零集，则称之为弥散的．一个测度 ν，若存在一个可数集，其余集关于 ν 是零集，此时称 ν 为原子的．

显然地，一个弥散的测度同一个原子的测度总是互为奇异的．

定理 3.6.8. 任意一个测度 μ 均可按唯一的方式写成

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

其中 μ_1 是弥散的而 μ_2 为原子的．

证：唯一性可由两个分量 μ_1 和 μ_2 是互为奇异的要求推出（与定理 3.6.1 中唯一性的证明比较）．为证明存在性，我们可以假定 $\mu \geqslant 0$．使 $\mu(\{t\}) \neq 0$ 的点 t 的集合是可数的，因若 $\varepsilon > 0$，则在每个紧致集中仅仅存在有限多个点 t 使得 $\mu(\{t\}) > \varepsilon$．将这些点排成一个序列 t_n，并令

$$\mu_2(f) = \sum \mu(\{t_n\}) f(t_n), \text{ 对 } f \in C_0^+.$$

由于此级数的部分和 $\leqslant \mu(f)$，所以它是收敛的，并且其和显然定义一个测度．我们令 $\mu_1 = \mu - \mu_2$．于是 $\mu_1 \geqslant 0$，并且每一点关于 μ_1 为零集，这是由于关于 μ 为零集的点关于 μ_1 是一个零集，同时点 t_n 依其定义关于 μ_1 也是零集．这就证明了 μ_1 是弥散的．

综合定理 3.6.1. 和定理 3.6.8，得如下结论：

定理 3.6.9. 设 μ 为一弥散测度．则每一测度 ν 可以唯一地表示成

$$\nu = g\mu + \nu' + \nu'',$$

其中 g 是局部 μ-可积的，ν' 是弥散的且同 μ 互为奇异，而 ν'' 是原子的（故也同 μ 互为奇异）．

§7. L^p 上的连续线性泛函

所谓 L^p 上的一个连续线性泛函，是指一个线性函数

$$L^p \ni f \to \theta(f) \in \mathscr{R}$$

它具有性质：若按 L^p 范数 $f_n \to g$，即 $\|f-g\|_p \to 0$，则有 $\theta(f_n) \to \theta(g)$。它的线性性质的含义是

$$\theta(af+bg) = a\theta(f) + b\theta(g); \quad a, b \in \mathscr{R}, \ f, g \in L^p.$$

而连续性则等价于：存在一个常数 C，使

$$|\theta(f)| \leqslant C\|f\|_p, \ f \in L^p.$$

这个条件的充分性是显而易见的，同时，留作练习请读者证明连续性的定义本身就蕴含上述不等式。不等式中那个可能的最小常数 C 叫做该线性泛函的范数。

定理 3.7.1. 若 θ 是 L^p 上的一个连续线性泛函数，$1 \leqslant p < \infty$，则存在一个函数 $g \in L^q$，其中 $1/p + 1/q = 1$，使得

$$\theta(f) = \int fg\, d\mu, \ f \in L^p. \tag{3.7.1}$$

这个线性泛函的范数就等于 $\|g\|_q$。

(3.7.1) 的右端是 L^p 上的一个以 $\|g\|_q$ 为范数的线性泛函数，这点可由霍尔德尔不等式及其逆（在第二章 §9 证明过）得以证明。

定理的证明：两个 L^p 上的连续泛函，若对所有 $f \in C_0$ 是等同的，则由于每个 $f \in L^p$ 可以用 C_0 中函数按 L^p 的范数去逼近，故这两个泛函为恒等。这也就是说，为证定理只需证明：可以找到一个函数 g，使(3.7.1)对 $f \in C_0$ 成立就足够了。因此，我们考虑 θ 在 C_0 上的限制并把它记作 ν。由于

$$|\nu(f)| \leqslant C\|f\|_p, \ f \in C_0,$$

所以 ν 是一个拉东-斯蒂尔杰斯测度，因若取一序列 f_n，它在一固定的紧致集外为零并且一致地趋向于零，那么，显然地有

$$\|f_n\|_p \to 0.$$

同时，由 ν^+ 和 ν^- 的定义，我们得到

$$\nu^+(f) \leqslant C\|f\|_p, \ \nu^-(f) \leqslant C\|f\|_p, \ f \in C_0^+.$$

根据对称性，在以下的讨论中只要讨论 ν^+ 就够了．我们有

$$\int^* f\, d\nu^+ \leqslant C\left(\int^* f^p\, d\mu\right)^{1/p}, \quad f \geqslant 0.$$

事实上，已知此不等式对 $f \in C_0^+$ 成立，而这就表明对 $f \in I^+$ 从而对所有 $f \geqslant 0$ 它也成立．因此，任一 μ-零集是 ν^+-零集．从而，由定理 3.6.5 有 $\nu^+ = g^+\mu$ 对某个局部 μ-可积 g^+．现在剩下的就是证明 $g^+ \in L^q$．为此，我们取一连续的正函数 $h \in L^q$，并令 $g_n = \inf(g^+, nh)$．则有 $g_n \in L^q$ 和 $g_n \uparrow g^+$ 当 $n \to \infty$．由于 $g_n\mu \leqslant \nu^+$，故

$$\int f g_n\, d\mu \leqslant C\|f\|_p, \ 0 \leqslant f \in L^p.$$

根据霍尔德尔不等式的逆(定理 2.9.2)，于是对任意 n 有

$$\|g_n\|_q \leqslant C.$$

令 $n \to \infty$ 得 $g^+ \in L^q$，由此定理得证．

§8. 古典情形的勒贝格分解

这里，我们将在 μ 为勒贝格测度的情形下进一步讨论定理 3.6.1．也就是说，设 ν 是任意一个测度并考虑分解

$$\nu = g\mu + \nu',$$

其中 ν' 关于 μ 是互为奇异的．我们来建立这个分解与第二章 §10 中所讨论的多重积分的微商之间的联系．

定理 3.8.1. 对几乎所有的 x，有

$$g(x) = \lim_{\mu(S)\to 0} (\mu(S))^{-1} \int_S d\nu,$$

其中 S 代表包含 x 的球．

对于 ν 的以 μ 为基的那部分，上述结论是已知的．所以，问题就是要证明一个奇异测度(与勒贝格测度互为奇异的测度)的微商存在，并且几乎处处等于零．

首先注意，若 ν 是一个任意的正测度，则有和定理 2.10.2 相当的论断成立，证明不需要任何改变. 也就是说，若令

$$\tilde{\nu}(x) = \sup_{x \in S} (m(S))^{-1} \int_S d\nu,$$

则有

$$\mu\{x; \tilde{\nu}(x) > s\} \leqslant \frac{4^d}{s} \nu^*(1).$$

现在假定 ν 和 μ 是互为奇异的，则存在 R^d 的一个由两个互余集合 E_1 和 E_2 组成的剖分，使得

$$\mu(E_1) = 0, \ \nu(E_2) = 0.$$

若 O 为包含 E_2 的一个开集，并且 $\nu(O) < \infty$，我们令 $\nu_0 = x_O \nu$. 因为 $\nu(E_2) = 0$，故可选 O，使 $\nu_0(1) = \nu(O)$ 为任意小. 现在我们有

$$\mu\{x; \tilde{\nu}_0(x) > s\} \leqslant \frac{4^d}{s} \nu_0(1).$$

若 M_s 代表所有使

$$\overline{\lim_{\mu(S)\to 0, x \in S}} (\mu(S))^{-1} \int_S d\nu > s$$

成立的 x 的集合，则集合 $M_s \cap E_2$ 含于 O 之中，从而在此集合上 $\tilde{\nu}_0(x) > s$. 由于 E_1 是一个 μ-零集，所以我们有

$$\mu^*(M_s) = \mu^*(M_s \cap E_2) \leqslant \mu^*\{x; \tilde{\nu}_0(x) > s\} \leqslant \frac{4^d}{s} \nu_0(1).$$

因 O 可以选得使上式右端任意地小，故对任意 $s > O$ 而言 M_s 必定为零集，由此定理 3.8.1 得证.

特别地，在一维情形定理 3.8.1 告诉我们(见定理 2.10.5)：

定理 3.8.2. 若 ϕ 为一有界变差函数，则它的微商 $\phi'(x)$ 几乎处处存在，并且它是一个关于勒贝格测度的局部可积函数.

练习. 试证

$$\lim_{\mu(S)\to 0, x \in S} (\mu(S))^{-1} \int_S |d\nu - a d\mu| = |g(x) - a|$$

对几乎所有的 x 和任一实数 a 成立. 考察 $a = g(x)$ 的情形.

练习. 设 $h \in L^\infty \cap L^1$ 在无穷远处趋于零. 令 $h_\varepsilon = \varepsilon^{-n} h(x/$

ε), $\varepsilon > 0$. 试证

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int h_\varepsilon(x-y)\,d\nu(y) = g(x)\int h\,dy,\text{ 对几乎所有 } x,$$

其中 ν 和 g 的含义与定理 3.8.1 中所述相同.

练习. 按第二章 § 10 结尾中的方法，直接证明

$$g(x) = \lim_{\mu(S)\to 0,\, x\in S} \mu(S)^{-1}\int_S d\nu$$

几乎处处存在. 在 μ 为勒贝格测度的情形下，这给出定理 3.8.1 的另外一个推证.

§ 9. 各种各样的推广

至此，我们仅仅讨论了实值函数的积分. 但是，把积分的定义推广到在任何一个巴拿赫 (Banach) 空间 B 中取值的函数并没有任何困难. 首先，当 f 属于集合 $C_0(\mathscr{R}^d, B)$，即在 B 中取值的具有紧致支集的连续函数的集合，利用 f 的一致连续性，通过黎曼积分和我们就可以定义 $\int f\,d\mu$. 接着可以将 L^1 定义为在 B 中取值的那样一些函数 f 的集合，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在一函数 $g\in C_0(\mathscr{R}^d, B)$ 使

$$\int^* \|f-g\|\,d\mu < \varepsilon.$$

容易看出，除了 $\mathscr{R}^d$ 是一个具有可数基的局部紧致拓扑空间 (即如此之拓扑空间，其中每个点均有一个紧致邻域，并存在一个可数的开集序列，使得任一开集均可表示成它的一个子序列的并集) 之外，$\mathscr{R}^d$ 的其余性质我们都没有用到. 实际上，于此我们还完全可以排除拓扑的作用. 设 E 是一个集合，C_0 是定义在 E 上的这样一些实值函数 f 的线性集合：若 $f\in C_0$ 则 $|f|\in C_0$. 由此推出，若 $f, g\in C_0$ 则 $\max(f, g)$ 和 $\min(f, g)$ 也必定是在 C_0 中，现在，假设 μ 是 C_0 上的一个正的线性形式，它满足条件 (3.13). 如果 I^+ 定义为 C_0^+ 中所有上升序列的极限. 那么，没

有实质性的差别，人们同样地可以定义 L^1 和可测性等等. 由于必须依据 I^+ 中函数的特性来展开讨论才有意义，所以这里的介绍是极其简短的.

上面指出的情况在概率论教材里是一开始就讲述的. 那里，C_0^+ 通过公理系统按这种或那种方式给出，从而是各不相同的，如满足一定条件的某族子集合的特征函数的所有有限线性组合就是这些可能的 C_0^+ 集合中的一个.

附　　录

众所周知,空间 $\mathscr{R}^d$ 是实数域 $\mathscr{R}$ 上的一个向量空间,我们于其上建立积分理论. $\mathscr{R}^d$ 上的每一个线性映射具有形式 $x \to Ax$,其中 A 是一个 $d \times d$ 实矩阵,而 x 可以理解成一个 $d \times 1$ 矩阵.由所有可逆的 $d \times d$ 矩阵作成的群记为 $GL(d,\mathscr{R})$.

当 $x \in \mathscr{R}^d$,我们总是用 $\|x\|$ 表示 x 的欧几里得范数,即

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ 若 } x = (x_1, \cdots, x_d).$$

回忆,$\mathscr{R}^d$ 的一个子集 O,若 O 中的任意一点皆为包含在 O 内的某个球的中心,亦即对某个 $\delta > 0$,$\{y; \|y - x\| < \delta\} \subset O$,则称 O 为**开集**. 已知:开集的任意并集和有限交集为开集. 因此,包含在一个给定集合 M 中的所有开集的并集仍然是开集. M 的最大的开子集叫做 M 的内部. 注意,x 属于 M 的内部的充分与必要条件是 x 为包含在 M 中的某个开球的中心.

一个集合 F,若它的余集 $F^C = \mathscr{R}^d \backslash F$ 是开的,则称之为**闭集**. 我们知道,闭集的任意交集和有限并集为闭集. 那个包含给定集合 M 的最小闭集(即所有包含 M 的闭集之交集)叫做 M 的闭包并记作 $\overline{M}$. 注意,$x \in \overline{M}$ 的充分与必要条件是每个以 x 为心的开球皆切割 M. 其次,称 $\overline{M} \cap \overline{M^C} = \partial M$ 为 M 的边界,从而 ∂M 由所有这样的点 x 组成,即任一以 x 为中心的球既切割 M 同时也切割它的余集 M^C.

$\mathscr{R}^d$ 的一个闭的且为有界的子集称之为**紧致集**. 根据波雷尔-勒贝格引理,覆盖一个紧致集 K 的任意一族开集含有一个有限子族,此子族也覆盖 K.

练习. 试证: a) F 为一闭集的充分与必要条件是 F 中的每一收敛序列的极限属于 F. b) K 为紧致集的充分必要条件是 K 中每一序列有一个收敛的子序列,其极限在 K 中.

对于一个函数 $f: \mathscr{R}^d \to \mathscr{R}$，其支集 $\operatorname{supp} f$ 定义为使 $f(x) \neq 0$ 的所有 x 之集合的闭包．这也就是说，$(\operatorname{supp} f)^C$ 是使 $f(x) = 0$ 的点集的内部．因为支集恒为闭集，所以 $\operatorname{supp} f$ 为紧致集的充分必要条件是在一个有界集之外 $f(x) = 0$．把从 $\mathscr{R}^d$ 到 $\mathscr{R}$ 的所有连续函数的集合记作 $C = C(\mathscr{R}^d) = C(\mathscr{R}^d, \mathscr{R})$，另外，$C_0 = C_0(\mathscr{R}^d)$ 为由 C 中所有具有紧致支集的函数所组成的集合。

对于任意函数 f_n，可按通常的方法逐点定义函数

$$|f_1|,\ f_1 + f_2,\ f_1f_2,\ \max(f_1, f_2),\ \min(f_1, f_2)$$

$$\lim f_n,\ \sup_n f_n \text{ 和 } \inf_n f_n,$$

例如

$$(\max(f_1, f_2))(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$$

而

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x), \text{ 对所有 } x \in \mathscr{R}^d.$$

我们令 $f^+ = \max(f, 0) \geqslant 0$ 和 $f^- = \min(-f, 0) \geqslant 0$，则有

$$f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-.$$

若 E 是 $\mathscr{R}^d$ 的一个子集，我们定义它的特征函数 χ_E 为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \in E, \\ 0 & \text{当 } x \in E^C = \mathscr{R}^d \setminus E. \end{cases}$$

于是有

$$\chi_{E^C} = 1 - \chi_E,$$

$$\chi_{E_1 \cup E_2} = \max(\chi_{E_1}, \chi_{E_2}) = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - \chi_{E_1}\chi_{E_2},$$

$$\chi_{E_1 \cap E_2} = \min(\chi_{E_1}, \chi_{E_2}) = \chi_{E_1}\chi_{E_2},$$

$$\chi_{E_1 \triangle E_2} = |\chi_{E_1} - \chi_{E_2}| = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - 2\chi_{E_1}\chi_{E_2}.$$

这里，$E_1 \triangle E_2 = E_1 \cup E_2 \setminus E_1 \cap E_2$，称为 E_1 和 E_2 的对称差，即 $E_1 \triangle E_2$ 由属于 E_1 和 E_2 中之一但不同时属于 E_1 和 E_2 之点所组成。

练习． 试证 χ_E 于点 x 为连续的充分必要条件是 $x \notin \partial E$。

对于一个序列 $(a_n)_1^\infty$，其中 a_n 可以是实数，是 $+\infty$，或者是 $-\infty$，若当 $n \to \infty$ 时 a_n 上升（下降）地趋于 a，即若对所有 n

$$a_n \leqslant a_{n+1}(a_n \geqslant a_{n+1}) \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

则用记号 $a_n \uparrow a(a_n \downarrow a)$ 当 $n \to \infty$ 来表示. 对于一个任意序列 $(a_n)_1^\infty$, 优于它的最小下降序列是 $(\sup_{k\geqslant n} a_k)_{n=1}^\infty$, 我们令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant n} a_k) = \inf_n (\sup_{k\geqslant n} a_k).$$

类似地,令

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geqslant n} a_k) = \sup_n (\inf_{k\geqslant n} a_k).$$

显然地,有

$$\underline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, a_n,$$

其中等号当而且仅当 $\lim a_n$ 存在时成立.

设 f: $M \to \mathscr{R}$ 是一个任意函数,我们分别地用 $\sup_M f$ 和 $\inf_M f$ 表示值集的上确界和下确界.这里,若 f 为上方无界,则令 $\sup_M f = +\infty$. 显然地,

$$\sup_M f = -\sup_M (-f)$$

并且

$$\sup_M (f+g) \leqslant \sup_M f + \sup_M g.$$

我们取 $M = \{k; k \geqslant n\}$ 就知, 若 (a_n) 和 (b_n) 为下方有界序列则有

$$\overline{\lim}\, (a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

若 f 和 g 是上方有界的,则由不等式 $f \leqslant g + |f-g|$ 和 $g \leqslant f + |f-g|$ 可得

$$|\sup_M f - \sup_M g| \leqslant \sup_M |f-g|.$$

若 $M = \{1,2\}$, 由此可得

$$|\max(a_1,a_2) - \max(b_1,b_2)| \leqslant \max(|a_1-b_1|, |a_2-b_2|).$$

对于 $\mathscr{R}^d$ 的一个非空子集 M, 我们令

$$d(x,M) = \inf_{y\in M} \|x-y\| = -\sup_{y\in M}(-\|x-y\|).$$

注意, $d(x,M) = 0$ 的充分必要条件是 $x \in \overline{M}$. 其次,由于

$$|d(x_1,M)-d(x_2,M)| \leqslant \sup_{y\in M} |-\|x_1-y\|+\|x_2-y\||$$
$$\leqslant \|x_1-x_2\|,$$

从而 $x \to d(x,M)$ 是连续的(甚至是一致连续的).

练习. 假设 F 是开集 O 的一个闭子集. 试证函数

$$f(x)=\frac{d(x,O^C)}{d(x,F)+d(x,O^C)}, \quad x \in \mathscr{R}^d$$

是连续的, 并有 $0 \leqslant f \leqslant 1$, 当 $x \in F$ 时 $f(x)=1$ 和 $\operatorname{supp} f \subset \bar{O}$. 其次,证明: 若 K 是紧致的,则有 $f \in C_0$, $0 \leqslant f \leqslant 1$,在 K 的一个邻域内 $f=1$ 和 $\operatorname{supp} f \subset O$.

综 合 练 习

1. 设 f 是 $\mathscr{R}^d$ 上的一个函数，它满足 $f(x+l)=f(x)$ 对 $x,l\in\mathscr{R}^d$，这里 l 具有整数坐标．试证：若 f 在

$$I=\{x;\ 0\leqslant x_j\leqslant 1,\ j=1,\cdots,d\}$$

上为黎曼可积，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t\alpha_1,\cdots,t\alpha_d)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t\alpha_1,\ \cdots,\ t\alpha_d)\,dt=\int_I f\,dx,$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$ 在有理数域上是线性无关的，即，若 $r_1\alpha_1+\cdots+r_d\alpha_d=0$，其中 r_i 为有理数，则必定 $r_1=\cdots=r_d=0$。

2. 设 f 是一个在开集 $O\subset\mathscr{R}^d$ 上二次连续可微的函数，并令 $f_h(x)=f(x)-\langle x,h\rangle$．试证：对除一个零集外的所有 h，矩阵 $(\partial^2 f_h/\partial x_j\partial x_k)$ 在 O 中使 $\partial f_h/\partial x_j=0,j=1,\cdots,d$ 的任意一点上是可逆的．

3. 定义实数轴上的一个函数 f：$f(x)=0$ 当 x 为无理数，$f(0)=0$ 和 $f(x)=1/q$ 当 $x=p/q$，这里 p 和 q 互质且 $q>0$．试证 f 是上方半连续的．

4. 从闭区间 $[0,1]$ 的中央删去一个长度为 $1/p_1$ 的开区间．再从余下各个闭子区间的中央同时删去一个开区间，其长度是那子区间长度的 $1/p_2$．如此重复进行，作到第 n 步得到一个闭集 F_n．试证闭集 $\bigcap\limits_1^\infty F_n$ 的测度为 $\prod\limits_1^\infty(1-1/p_n)$．

5. 试求所有在十进制记数法的表示中不出现数字 7 的实数之集合的测度．

6. 设 E 是一个实数集合．当 E 中的数用十进制记数法表示时，任何一个有限的数字序列都在 E 中出现．试证 E^C 为一零集．

7. 设 $E_1,E_2,\cdots$ 是 $\mathscr{R}^d$ 的子集并且 $\sum m^*(E_i)<\infty$. 试证 $\{x; x\in E_i$ 对无限多个 $i\}$ 为零集.

8. 设 $(a_n)_1^\infty$ 为一实数序列，并知存在一个常数 K，使得没有长度为 1 的区间能够包含多于 K 个 a_n. 试证：若 $f\in L^1(\mathscr{R})$，则 $\sum\limits_1^\infty f(x+a_n)$ 对几乎所有的 x 收敛.

9. 试证：若 $f\in L^1(\mathscr{R})$，则 $\sum\limits_1^\infty f(nx)$ 对几乎所有的 x 绝对收敛.

10. 设 $(a_n)_1^\infty$ 和 $(b_n)_1^\infty$ 为实数序列且 $b_n\geqslant 0$ 对所有的 n. 试证级数

$$\sum_1^\infty b_n|x-a_n|^{-\alpha}$$

当 $\sum\limits_1^\infty b_n^{1/\alpha}<+\infty$ 和 $\alpha>1$ 时对几乎所有的 x 收敛.

11. 对于一个实数 a，我们令 E_a 为 $\mathscr{R}^d$ 中所有满足下述条件的 x 之集合，即使不等式

$$|\langle l,x\rangle|=|l_1x_1+\cdots+l_dx_d|\geqslant\|l\|^{-a}$$

对除有限个之外的所有的整数向量 $l=(l_1,\cdots,l_d)$ 成立. 试证若 $a<d-1$ 则 E_a 的余集是一个零集. 并且证明：对于 $\mathscr{R}^d$ 中每个 x 有

$$\varliminf_{|l|\to\infty}\|l\|^{d-1}\cdot|\langle l,x\rangle|\leqslant C_d\|x\|,\ 当\ d>1.$$

12. 设 E 为实数轴的一个子集，用 M 表示所有与 E 中无穷多个点模 1 相等的点组成之集合. 试证：若 E 可测，则 M 可测，并且当 E 有有限的外测度时，M 是一个零集.

13. 设 E 为实数轴上的一个零集. 试证：存在数 a，使得对任何有理数 r，$a+r$ 均不属于 E.

14. 设 $(E_k)_1^\infty$ 为 $\mathscr{R}^d$ 中可测集合的一个序列，用 A_i 表示那样一些点 x 的集合，对于每个这样的 x 都恰有 i 个 k 的值使 $x\in E_k$. 试证 A_i 为可测并且

$$\sum_k m(E_k) = \sum_j jm(A_j).$$

15. 设E是$(0, 1)$中的一个可测集，其测度$>1/2$. 试证可以找到$x,y\in E$使$x+y=1$.

16. 试证若在实数轴上$f\in I^+$,则

$$\int^* f\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

17. 设$f\in L^p$和$g\in L^q$，其中$1\leqslant p, q\leqslant\infty$且$1/p+1/q=1$. 试证

$$\int f(x-y)g(y)dy$$

为x的连续函数.

18. 设$A, B\subset\mathscr{R}^d$为可测集合并假定对每个$x\in\mathscr{R}^d$，存在一个零集N_x使$A+x\subset B\cup N_x$. 试证：若A不是一个零集，则B^C为一零集.

19. 假定A是一个可测并具正测度的实数集合. 试证$\{x-y; x, y\in E\}$包含原点的一个邻域.

20. 试证若在实数轴上$f\in L^1$则

$$\lim \sum_{-n^2}^{n^2} \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$$

21. 设$f\in L^1(\mathscr{R})$和$g\in L^\infty(\mathscr{R})$是周期为$T$的函数. 试证

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)g(nx)dx = \left(\int f(x)dx\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\right).$$

22. 试证若级数$\sum_1^\infty a_n\sin nx$对一个正测度集合中的所有x绝对收敛,则$\sum_1^\infty |a_n| < \infty$.

23. 试证若$f\in L^1(\mathscr{R})$则

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T} f(s+t)dt\right| ds = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\right|.$$

24. 设序列$f_1, f_2, \cdots$由区间$(0, 1)$上的可测函数所作成，并且

$|f_n(x)|\leqslant 1$. 试证：若

$$\int_0^y f_n(x)dx\to 0,\ 当\ n\to\infty$$

对所有的 $y\in(0,1)$ 成立，则对所有的 $g\in L^1$，

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)dx\to 0,\ 当\ n\to\infty.$$

25. 设 $f\in L^1$. 证明，对可测的 E，当 $m(E)\to 0$ 时

$$\int_E fdx\to 0.$$

26. 设 $0\leqslant f_n\in L^1$. 假定对几乎所有的 x，$f_n(x)\to f(x)$，并且 $\int f_n dx\to A$ 当 $n\to\infty$. 试证 $f\in L^1$ 并且

$$\int|f_n-f|dx\to A-\int fdx\ 当\ n\to\infty.$$

27. 设函数 $f,f_1,f_2\cdots\in L^p$，其中 $1\leqslant p<\infty$，并假定对几乎所有的 x，$f_n(x)\to f(x)$ 和 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$ 当 $n\to\infty$. 试证 $\|f-f_n\|_p\to 0$ 当 $n\to\infty$.

28. 设 $f\in L^p$，$g_n\in L^q$，$n=1,2,\cdots$，其中 $1<p<\infty$ 且 $1/p+1/q=1$. 试证：若 $\|g_n\|_q\leqslant C, n=1,2,\cdots$ 和 $g_n(x)\to g(x)$ a.e. 则 $g\in L^q$ 并且

$$\int fg_n dx\to\int fgdx.$$

29. 设 $f_n\in L^p$, $g_n\in L^q$ 对 $n=1,2,\cdots$，其中 $1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$. 试证：若 $|f_n|\leqslant F\in L^p$ 对所有 n，$\|g_n\|_q\leqslant C$，$f_n(x)\to f(x)$ a.e. 和 $g_n(x)\to g(x)$ a.e. 则有 $f\in L^p, g\in L^q$，$\|f-f_n\|_p\to 0$ 和

$$\int f_n g_n dx\to\int fgdx.$$

30. 设 f_n 为一非负可测函数序列，$\int f_n(x)=1$ 对每个 n，$f_n(x)\to 0$ 对所有 x 当 $n\to\infty$. 试问函数 $f=\sup\limits_n f_n$ *a*) 可测？ *b*) 可积？

31. 设 $f(x,y)$ 对 $(x,y)\in\mathscr{R}^2$ 有定义. 假定 $f(x,y)$ 对任一固定 y

是 x 的连续函数，并且对固定的 x 是 y 的可测函数. 试证 f 是 $\mathscr{R}^2$ 上的一个可测函数.

32. 试问 $(0,1)$ 的一个开子集的边界必定是零测集吗?

33. 设 E 是一个实数集合并满足条件:

$$m^*(E\cap I)\leqslant km(I)，\text{对任意区间 } I,$$

其中常数 $k<1$ 且不依赖于 I. 试证 E 为一零集.

34. 构造一个可测集合 $E\subset\mathscr{R}^d$，使得 $0<m(E\cap O)<m(O)$ 对任一测度为有限值的非空开集 O 成立.

35. 设 E 是区间 $I\subset\mathscr{R}^d$ 的一个子集，并令 $0<\varepsilon<1$. 若 $I_1,\cdots,I_N$ 是区间 I 的一个剖分，我们用 I' 表示所有使 $m^*(I_j\cap E)>\varepsilon m(I_j)$ 成立的 I_j 的并集. 试证当剖分的细密度趋于零时

$$m(I')\to m^*(E).$$

设 I'' 是按同一方法定义的，但是用 $I\backslash E$ 替代 E，证明 E 为可测的充分与必要条件是 $m(I'\cap I'')$ 随剖分的细密度趋向于零.

36. 设 f_n 是一个在 $(-\infty,+\infty)$ 中取值的可测函数序列. 试证: 若

$$m(\{x;|f_m(x)-f_n(x)|\geqslant\varepsilon\})\to 0，\text{当 } n,m\to\infty,$$

则可选出一个子序列，它对几乎所有的 x 收敛.

37. 设非负可测函数 f 和 g 定义在可测集 $E\subset\mathscr{R}^d$ 上，令 $E_y=\{x\in E;g(x)\geqslant y\}$ 和 $h(y)=\int_{E_y}f(x)dx$. 试证

$$\int_E f(x)g(x)dx=\int_0^\infty h(y)dy.$$

38. 假定 f 在区间 $[0,1]$ 上连续而 g 是 $[0,1]$ 上的可测函数并满足 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(g(x)^n)dx$$

存在并给出极限值.

39. 设 f 在实数轴上可积. 试证对几乎所有的 a,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n+a)dx=f(a).$$

40. 设E是$\mathscr{R}$的子集. 试证

$$m^*(E)=\inf_{f\in K}\{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-f(-x))\},$$

其中K是所有于E上微商存在并且$\geqslant 1$的增函数的集合.

41. 设f是$(0,1)$上的一个增函数. 试证$\int_0^1 f'(x)dx$最大不超过f的值域的测度.

综合练习的提示

1. 根据魏尔斯特拉斯（Weierstrass）逼近定理，一个连续的周期函数可以用三角多项式 $\sum c_l \exp\langle 2\pi i x, l\rangle$ 一致逼近，这里 l 的坐标为整数。修改(1.1.5)使其中 h_1 和 h_2 为三角多项式。思考一下当 f 为一特征函数时论断的含义。

2. 对映射 f' 应用莫尔斯-萨得定理(推论 1.4.4)。（注意到当使用勒贝格零集时，K 为紧致集的限制是不必要的。）

3. 对任意 $a > 0$，$\{x; f(x) \geqslant a\}$ 是一个离散集从而是闭的。其次，当 $a \leqslant 0$ 时它由所有实数作成。

4. B. 莱维定理。

5. 仅仅是练习 4 的一个变体，这里每次删去区间的 1/10，删去的不是正当中的那个子区间。集合的测度为零。

6. 当考虑一个固定的数字序列时，则是与练习 5 基本上相同的问题，仅仅存在可数多个有限的数字序列！

7. 考虑特征函数之和。

8. 同定理 2.4.10 前面的练习比较。证明 $\sum_1^\infty |f(x + a_n)|$ 是局部可积的。

9. 考虑

$$\int g(x) \sum_1^\infty |f(nx)| dx,$$

其中 $g \in C_0^+$ 在靠近 0 的地方是零。

10. 如果函数 $|x - a_n|^{-\alpha}$ 是可积的话，那么这基本上是练习 8。若单独地考虑使

$$|x - a_n| \leqslant b_n^{1/\alpha} \quad \text{对无穷多个 } n$$

成立的那些点 x（证明它们作成一个零集），那么可以排除奇

性并象练习 8 那样进行证明.

11. 估计所有满足

$$\|x\| \leqslant M \quad 和 \ |l_1x_1 + \cdots + l_dx_d| \leqslant \|l\|^{-a}$$

的 x 的测度. $\sum_{l \neq 0} \|l\|^{-b}$ 对甚么样的 b 为收敛? 论断

$$\underline{\lim} \|l\|^{d-1} |\langle l, x\rangle| \leqslant C_d \|x\|$$

的证明若不用积分理论是复杂的, 当然若 $\langle l, x\rangle = 0$ 对某 $l \neq 0$ 成立, 则这是平凡的. 在其他情形考虑所有的纯量积 $\langle l, x\rangle$, 其中 $\|l\| \leqslant R$. 它们是不同的并位于区间 $(-R\|x\|, R\|x\|)$ 之内. 因为它们的数目至少是 $C(R-\sqrt{d})^d$, 其中 C 是单位球的体积, 故在 $\|l\| \leqslant R$ 内有 $l_1(R)$ 和 $l_2(R)$ 使 $0 < |\langle x, l_1(R)\rangle - \langle x, l_2(R)\rangle| \leqslant 2R\|x\|(C(R-\sqrt{d})^d - 1)^{-1} \to 0$ 当 $R \to \infty$. 因此 $\underline{\lim} \|l(R)\|^{d-1} |\langle x, l(R)\rangle| \leqslant 2^d C^{-1} \|x\|$, 其中 $l(R) = l_1(R) - l_2(R) \to \infty$ 当 $R \to \infty$.

12. 若 f 是 E 的或者是 $\supset E$ 的一个可积集合的特征函数, 则有练习 8 的论断.

13. 可数多个零集之并集为一零集.

14. 引进特征函数.

15. 不然的话, E 和 $E_1 = \{x; 1 - x \in E\}$ 就应当是分离的, 这样它们的并集(含于 $(0,1)$) 将有测度 >1.

16. 若 f 为连续则等号成立. 用连续函数从下方近似 f.

17. 由霍尔德尔不等式有

$$\left|\int f(x-y)g(y)dy\right| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

按 $L^p(L^q)$ 的范数用连续函数近似 $f(g)$.

18. 引进 A 和 B^C 的可积子集的特征函数并利用傅比尼定理后面的练习.

19. 若 f 为 E 的特征函数, 则所考虑的集合包含使

$$\int f(x+y)f(y)dy \neq 0$$

的每个点 x (为什么?). 我们可以假定 E 具有有限的测度(为

什么?),那么根据练习 17 这个积分是连续的并在原点 $\neq 0$.

20. $f \in C_0$ 的情形是显然的. 根据 L^1 的定义作近似.

21. 我们可以假定 $g \geqslant 0$. 若 $f \in C_0$, 论断显然成立(分解成对 nx 在 g 的一些周期上积分并应用积分中值定理). 对一般的 $f \in L^1$ 可作其近似. 当 g 为正弦或余弦函数的特殊情形, 这称为黎曼-勒贝格引理.

22. 各项绝对值的和在某个正测度集上是有界的. 在这个集合上积分并利用练习 21.

23. $f \in C_0$ 的情形是容易的. 利用近似.

24. 首先考虑阶梯函数 g: $g(1) = 0$. 它们在 L^1 中是稠密的(为什么?).

25. 用一个 C_0 中的函数近似 f.

26. 利用法图引理和考虑 $g_n = \min(f, f_n)$. 注意 $A = \int f dx$ 的情形.

27. 根据叶果洛夫定理和练习 25, 我们可以找到紧致集 K 使 $\int_{K^C} |f|^p dx$ 任意小, 同时还使 f_n 于K上一致地收敛到 f. 利用练习 26.

28. 利用叶果洛夫定理、练习 25 和霍尔德尔不等式.

29. 利用练习 28.

30. a) 显然是可测的. b) 不可积, 否则由勒贝格控制收敛定理将导至 $\int f_n dx \to 0$.

31. 令 $X_k(x) = j/k$, 当 $j/k \leqslant x < (j+1)/k$ 和 j 是一个整数时,则 $f(x,y)$ 与 $\lim f(X_k(x),y)$ 相等,后一函数是可测的.

32. 不是. 从练习 4 可以得到一个反例.

33. 首先将不等式推广到开集 I. 可以假定 $m^*(E) < \infty$, 由此可得 $m^*(E) \leqslant k m^*(E)$, 亦即 $m^*(E) = 0$.

34. 注意,只要关于一个开集的基底 $O_1, O_2, \cdots$来作就可以了. 逐次地构造 E_k, 它们关于 $O_1, \cdots, O_k$ 是合乎要求的并且

$m(E_k \triangle E_{k+1})$ 快速地趋近于零.

35. 可以假定 E 是可测的（为什么?）. 然后选区间的一个有限并集 A，使得 $m(E\triangle A)$ 是小的. 设 $\delta < \min(\varepsilon, 1-\varepsilon)$. 假定 $m(I_j \cap (A\triangle E)) > \delta m(I_j)$ 不成立，我们有

$$m(I_j \cap A) > (\varepsilon+\delta)m(I_j) \Rightarrow m(I_j \cap E)$$
$$> \varepsilon m(I_j) \Rightarrow m(I_j \cap A) > (\varepsilon - \delta)m(I_j).$$

这些区间的测度有多大?

36. 见定理 2.4.10 的证明.

37. 傅比尼定理. 不要忘记检验可测性.

38. 勒贝格控制收敛定理给出极限值

$$f(0)m\{x; g(x) < 1\} + f(1)m\{x; g(x) = 1\}.$$

39. 若 $F(t) = \int_0^t f(a+x)dx$，则 $F(t)/t \to f(a)$ 对几乎所有的 a. 可将积分写成

$$\int_0^1 F'(t)dt^{1/n} = F(1)/n + \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^1 F(t)t^{\frac{1}{n}-2}dt.$$

（假定 $f \geqslant 0$ 和用傅比尼定理.） 首先考虑原点的一个邻域上的积分，于其上 $|F(t)/t - f(a)| < \varepsilon$. 然后考虑这个邻域的余集上的积分.

40. 方法之一：令 f 是包含 E 的一开集之特征函数的积分. 方法之二：利用

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - f(-x)) \geqslant \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f'(t)dt$$

以及在一个包含 E 的可测集合上 f' 存在并且 $\geqslant 1$.

41. 值域的测度等于 $f(1) - f(0)$ 减去所有不连续点处跳跃度之和，也就是说等于

$$\int_0^1 f'(x)dx + \int_0^1 ds(x),$$

其中 ds 是 df 的奇性弥散部分.